Algebra IR - Lista 7

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową i p – liczbą pierwszą.

1. Niech $a_1, \dots, a_n \in A$. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{Z}^n \to A$ zadaną wzorem
$$f(k_1, \dots, k_n) := k_1 a_1 + \dots + k_n a_n.$$
Udowodnić, że f jest homomorfizmem o obrazie $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

2. Znaleźć produkt grup cyklicznych, z którym izomorficzna jest grupa
$$\mathbb{Z}^3 / \langle (10, 11, 8), (4, 7, 4), (4, 4, 4) \rangle.$$

3. Załóżmy, że $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ są takie, że
$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{a_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{b_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{b_k}.$$
Udowodnić, że $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$.

4. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
   (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$,
   (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$,

5. Załóżmy, że grupa G jest skończona i że każdy element G ma rząd mniejszy bądź równy 2. Udowodnić, że istnieje $l \in \mathbb{N}$, takie że
$$G \cong (\mathbb{Z}_2)^l.$$

6. *Odwrócenie Tw. Lagrange'a dla grup przemiennych*
Załóżmy, że $|A| = n$ (cały czas zakładamy, ze A jest przemienna!) i $k|n$. Udowodnić, że istnieje $H \leqslant A$, taka że $|H| = k$.