Teoria stabilności I, Lista 1

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ stabilnej teorii T.

Zadanie 1. Przypomnijmy, że (niekoniecznie zupełny) typ $\pi(x)$ forkuje się [dzieli się] nad A, gdy $\pi(x)$ implikuje formułę $\varphi(x)$, która forkuje się [dzieli się] nad A. Udowonić, że jeśli typ π nie forkuje się nad A, to rozszerza się on do typu zupełnego $p \in S(\mathfrak{C})$ nieforkującego się nad A.

Zadanie 2. Używając definicji forkowania i dzielenia, udowodnić, że formuła $\varphi(x, b)$ forkuje się nad A wtedy i tylko wtedy, gdy forkuje się nad $\mathrm{acl}(A)$.

Zadanie 3. Udowodnić, że formuła $\varphi(x, a)$ nie forkuje się nad modelem M wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(M, a) \neq \emptyset$.
Wsk. Skorzystać z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

Zadanie 4. Udowodnić, że $ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_D C \iff a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_D C \wedge b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Da} Ca$.

Zadanie 5. Niech $p \in S(A)$ będzie typem stacjonarnym. Udowodnić, że każdy ciąg Morleya w p jest nieodróżnialny nad A oraz że każde dwa ciągi Morleya w p tej samej długości mają taki sam typ nad A.

Zadanie 6. Niech $\varphi(x, y)$ będzie formułą (bez parametrów), b ciągiem parametrów odpowiadającym zmiennym y, a A zbiorem parametrów.
(i) Udowodnić, że $\varphi(x, b)$ forkuje się nad A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego (równoważnie pewnego) nieskończonego ciągu Morleya $\langle b_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ w $\mathrm{stp}(b/A)$ układ formuł $\langle \varphi(x, b_\alpha) \rangle_{\alpha<\lambda}$ jest sprzeczny.
Wsk. Użyć "długiego" ciągu Morleya w $\mathrm{stp}(b/A)$ oraz różnych własności $\smile\!\!\!\!\!\!|$.
(ii) Wywnioskować, że formuła $\varphi(x, b)$ dzieli się nad A wtedy i tylko wtedy, gdy forkuje się nad A.

Uzupełnienie wiadomości z wykładu z podstaw teorii modeli

Przez notatki będę rozumieć ksero notatek z wykładu prof. Newelskiego, które zostawiłem Panom na półce. Są to notatki studenta, który kiedyś uczęszczał na wykład prof. Newelskiego.

Zadanie 1. Przeanalizować dowód z notatek lematu Shelaha o definiowalności.

Zadanie 2. Porównać definicję rangi R_Δ z notatek i z wykładu. Pokazać, że są one równoważne.

Zadanie 3. Na wykładzie słownie uzasadniłem (korzystając z lematu Shelaha), że dla danej formuły $\delta(x, y)$ następujące warunki są równoważne.

1. Formuła $\delta(x, y)$ nie ma własności porządkowej.

2. Dla każdego modelu M każdy typ $p \in S_\delta(M)$ ma δ-definicję.

3. $R_\delta(x = x) < \omega$.

4. T jest δ-stabilna, tzn. dla każdego A, $|S_\delta(A)| \leqslant |A| + \aleph_0$.

Przypomnieć sobie ten dowód. W razie trudności skorzystać z notatek.

Zadanie 4. Udowodnić twierdzenie z wykładu charakteryzujące stabilność teorii T.

Zadanie 5. Używając rangi $R_{\delta,2}$ udowodnić, że dla każdego zbioru A każdy typ $p \in S(A)$ jest definiowalny (nad A).

Zadanie 6. Przeanalizować w notatkach dowód faktu, że każdy typ zupełny nad $\mathrm{acl}(A)$ jest stacjonarny (gdzie A jest dowolnym zbiorem).

Zadanie 7. Przeanalizować w notatkach dowody równoważności różnych definicji nieforkujących rozszerzeń (oryginalna definicja, przez rangi R_δ, przez rangi $R_{\delta,2}$, przez definiowalność typów). Równoważność różnych definicji nieforkowania była sformułowana na pierwszym wykładzie jako twierdzenie.

Zadanie 8. Przypomnieć sobie i zrozumieć dowody (podane skrótowo na wykładzie) własności relacji $\mathop{\smile\kern-0.65em|}$ w teoriach stabilnych. Na wykładzie opuściłem omówienie dowodu symetrii $\mathop{\smile\kern-0.65em|}$. Dowód omówię na konsultacjach.