Teoria stabilności I, Lista 10

Zadanie 1. (i) Udowodnić, że pregeometria (S, cl) jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych domkniętych, skończenie wymiarowych podzbiorów $X, Y \subseteq S$, takich że $\dim(X) = 2$, zachodzi $\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.
(ii) Udowodnić, że pregeometria (S, cl) jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych domkniętych $X, Y \subseteq S$, X jest cl-niezależny od Y nad $X \cap Y$.

Zadanie 2. Uzasadnić, że geometrie afiniczne wymiaru > 2 nad pierścieniem z dzieleniem nie są modularne (mimo że są one lokalnie modularne).

Zadanie 3. (i) Pokazać, że niealgebraiczna formuła $\theta(x)$ jest słabo minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najwyżej $2^{|T|}$ niealgebraicznych typów globalnych zawierających $\theta(x)$.
(ii) Pokazać, że typ zupełny $p(x)$ jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on stacjonarny i U-rangi 1.
(iii) Pokazać, że niealgebraiczna formuła $\theta(x)$ jest słabo minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niealgebraiczny typ stacjonarny zawierający $\theta(x)$ jest minimalny.

Zadanie 4. Niech D będzie zbiorem minimalnym lub słabo minimalnym zdefiniowanym nad A. Pokazać, że wtedy dla dowolnego B oraz $b \in D$ zachodzi równoważność

$$b \in \mathrm{acl}_A(B) \setminus \mathrm{acl}_A(\emptyset) \iff b \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B.$$

Zadanie 5. Niech D będzie zbiorem minimalnym lub słabo minimalnym zdefiniowanym nad A, a $\bar{b}$ skończonym ciągiem elementów D.
(i) Udowodnić, że $\dim_{\mathrm{acl}_A}(\bar{b}) = U(\bar{b}/A)$.
(ii) Zakładając, że D jest silnie minimalny, udowodnić, że $\dim_{\mathrm{acl}_A}(\bar{b}) = RM(\bar{b}/A)$.
(ii) Zakładając, że D jest słabo minimalny, udowodnić, że $\dim_{\mathrm{acl}_A}(\bar{b}) = R^\infty(\bar{b}/A)$.

Zadanie 6. Niech $D(x)$ będzie słabo minimalną formułą, a $\varphi(x, y)$ dowolną formułą. Udowodnić, że istnieje formuła $\psi(y)$ (nad parametrami występującymi w $D(x)$ i $\varphi(x, y)$), taka że dla dowolnego b zachodzi

$$|\varphi(D, b)| \geqslant \aleph_0 \iff \models \psi(b).$$

Zadanie 7. Niech D będzie zbiorem minimalnym zdefiniowanym nad A.
(i) Pokazać, że krotność każdego typowo-definiowalnego (nad pewnym zbiorem B) zbioru $X \subseteq D^n$ jest skończona (przypomnijmy, że krotność X, oznaczana przez $\mathrm{mult}(X)$, to moc zbioru typów $p \in S(\mathrm{acl}(B))$ realizowanych w X i takich, że $U(p) = U(X)$).
(ii) Niech $a \in D^n$, $B \supseteq A$, $U(a/B) = m$ i $\mathrm{mult}(\mathrm{tp}(a/B)) := |\{p \in S(\mathrm{acl}(B)) : \mathrm{tp}(a/B) \subseteq p\}| = k$. Udowodnić, że istnieje $\varphi(x) \in \mathrm{tp}(a/B)$, taka że $U(\varphi(D^n)) = m$ i $\mathrm{mult}(\varphi(D^n)) = k$.

Zadanie 8. Niech D będzie zbiorem minimalnym zdefiniowanym nad A. Udowodnić, że wtedy pregeometria $\mathbb{D}_A$ jest jednorodna.