Teoria stabilności I, Lista 11

Zadanie 1. Niech D będzie zbiorem minimalnym zdefiniowanym nad A. Niech $a_1, \ldots, a_n \in D$ i $B \supseteq A$. Pokazać, że istnieje $c \in D_A^{eq}$, takie że $\mathrm{Cb}(\mathrm{stp}(a_1, \ldots, a_n/B)) = \mathrm{dcl}(c)$.

Zadanie 2. Niech D będzie zbiorem minimalnym zdefiniowanym nad A. Na zbiorze wszystkich sprzężeń D definiujemy relację równoważności $\sim$:

$$D_1 \sim D_2 \iff |D_1 \cap D_2| \geqslant \aleph_0.$$

Niech $a \in D \backslash \mathrm{acl}(A)$ i połóżmy $q = \mathrm{stp}(a/A)$. Udowodnić, że dla $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ zachodzi

$$f[D] \sim D \iff f{\restriction_{\mathrm{Cb}(q)}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cb}(q)}.$$

Zadanie 3. Pokazać, że definicja liniowości zbioru minimalnego D nie zależy od wyboru zbioru parametrów A, nad którym D jest zdefiniowany.

Zadanie 4. Niech K będzie nieprzeliczalnym ciałem algebraicznie domkniętym (a więc modelem nasyconym). Niech $a, b, c, d \in K$ będą takie, że $c \notin \mathrm{acl}(a, b)$ oraz $d = ac + b$. Pokazać, że $p := \mathrm{tp}(c, d/a, b)$ jest stacjonarny i że para (a, b) jest interdefiniowalna z $\mathrm{Cb}(p)$.

Zadanie 5. (i) Niech X będzie zbiorem A-niezmienniczym. Pokazać, że X jest 1-bazowany wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \subseteq X$ i dla każdego B mamy

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}(Aa) \cap \mathrm{acl}(AB)} B.$$

(ii) Wywnioskować, że teoria T jest 1-bazowana wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych A i B zachodzi $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}(A) \cap \mathrm{acl}(B)} B$.

Zadanie 6. Niech X będzie zbiorem niezmienniczym nad A.
(i) Udowodnić, że jeśli X jest 1-bazowany, to $X_A^{aeq} := \mathrm{acl}(AX)$ też jest 1-bazowany.
(ii) Udowodnić, że 1-bazowanie X nie zależy od wyboru zbioru A.
Wsk. Skorzystać z implikacji $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C b \Rightarrow \mathrm{acl}(a) \cap \mathrm{acl}(b) \subseteq \mathrm{acl}(C)$.