Teoria stabilności I, Lista 12

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ stabilnej teorii T.

Zadanie 1. Niech $M \models T$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Załóżmy, że $\bar{a} \not\downarrow_M \bar{b}$ oraz każdy z ciągów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ jest M-niezależny. Zdefiniujmy $p_i = \mathrm{tp}(a_i/M)$ oraz $q_j = \mathrm{tp}(b_j/M)$. Załóżmy, że zbiór $\{p_i : i \leqslant n\} \cup \{q_j : j \leqslant m\}$ składa się z parami ortogonalnych typów. Udowodnić, że istnieje typ p w tym zbiorze oraz podciągi $\bar{a}'$ i $\bar{b}'$ odpowiednio ciągów $\bar{a}$ i $\bar{b}$, których wszystkie elementy realizują typ p oraz $\bar{a}' \not\downarrow_M \bar{b}'$.

Zadanie 2. Udowodnić, że (ZC1) jest równoważna z (ZC2).

Zadanie 3. Załóżmy, że $A \subseteq B$, $d \downarrow_A B$, $d \in \mathrm{dcl}(Bc_1 \ldots c_n)$ oraz typy $\mathrm{tp}(c_i/B)$ są minimalne (zaświadcza to o tym, że $\mathrm{stp}(d/A)$ jest semi-minimalny). Niech a będzie takie, że $a \downarrow_A B$ oraz $d \in \mathrm{acl}(A, a)$. Niech d' będzie nazwą skończonego zbioru $\{f(d) : f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A, a)\}$ (wtedy oczywiście $d' \in \mathrm{dcl}(A, a)$). Pokazać, że $\mathrm{stp}(d'/A)$ też jest semi-minimalny.

Zadanie 4. Niech Z będzie zbiorem definiowalnym nad A, skończonej rangi Morleya i krotności 1. Załóżmy, że typ generic zbioru Z jest semi-minimalny, co jest zaświadczane przez typy minimalne skończonej RM. Udowodnić, że istnieje A-definiowalny podzbiór $Z' \subseteq Z$, taki że $RM(Z) = RM(Z')$, dla którego istnieje $B \supseteq A$ oraz B-definiowalne zbiory $Y_1, \ldots, Y_k$ skończonej rangi Morleya i krotności 1, których typy generic są minimalne, takie że $Z' \subseteq (Y_1 \times \cdots \times Y_k)^{eq}_B$.

Zadanie 5. Niech X będzie zbiorem definiowalnym nad A, skończonej rangi Morleya i krotności 1. Niech $\mathrm{tp}(a/A)$ będzie typem generic X. Niech $f \colon X \to Z$ będzie funkcją definiowalną nad A, taką że $\mathrm{tp}(f(a)/A)$ jest niealgebraiczny. Pokazać, że dla każdego $b \in Z$, $RM(f^{-1}(b)) < RM(X)$.