Teoria stabilności I, Lista 13

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ ω-stabilnej teorii T. $(G, \cdot)$ jest grupą definiowalną nad $\emptyset$ w $\mathfrak{C}$.

Zadanie 1. Udowodnić, że G^0 jest $\emptyset$-definiowalną, normalną podgrupą G.

Zadanie 2. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
(i) $\mathrm{tp}(a/A)$ jest typem generic w G.
(ii) Dla każdego $b \in G$, jeśli $a \perp_A b$, to $b \cdot a \perp_A b$.
(iii) Dla każdego $b \in G$, jeśli $a \perp_A b$, to $b \cdot a \perp A, b$.

Zadanie 3. (i) Dla typu stacjonarnego $p \in S_G(A)$ oraz $g \in G$ definiujemy $g \cdot p := \mathrm{tp}(g \cdot a/A)$, gdzie $a \models p|A, g$. Zauważyć, że definicja ta jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru a.
(ii) Dla typu globalnego $q \in S_G(\mathfrak{C})$ definiujemy $g \cdot q := \mathrm{tp}(g \cdot a/\mathfrak{C})$, gdzie $a \models q$. Udowodnić, że jeśli $p \in S_G(A)$ jest typem stacjonarnym, to $g \cdot p = (g \cdot \widetilde{p})|A$.
(iii) Wywnioskować, że jeśli $p \in S_G(A)$ jest typem stacjonarnym, to $\mathrm{Stab}(p) = \mathrm{Stab}(\widetilde{p})$, gdzie $\mathrm{Stab}(p) := \{g \in G : g \cdot p = p\}$ i $\mathrm{Stab}(\widetilde{p}) := \{g \in G : g \cdot \widetilde{p} = \widetilde{p}\}$.

Zadanie 4. Niech H będzie A-definiowalną podgrupą G, cH jej A-definiowalną warstwą i niech $a \in X$. Udowodnić, że $\mathrm{tp}(a/A)$ jest typem generic w X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $b \in X$, takie że $a \perp_A b$ oraz $b^{-1} \cdot a$ jest generic w H nad A, b.

Zadanie 5. Niech $p \in S_G(A)$ będzie typem stacjonarnym. Udowodnić, że:
(i) $\mathrm{Stab}(p)$ jest A-definiowalną podgrupą G^0,
(ii) $\mathrm{Stab}(p) = G^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy p jest typem generic w G,
(iii) jeśli $p \subseteq_{nf} q$, to $\mathrm{Stab}(p) = \mathrm{Stab}(q)$.

Zadanie 6. Niech $p = \mathrm{tp}(a/A) \in S_G(A)$ będzie stacjonarny i niech $H := \mathrm{Stab}(p)$. Załóżmy, że $X := H \cdot a$ jest $\mathrm{acl}(A)$-definiowalny. Na wykładzie było pokzane, że wtedy X jest A-definiowalny i p jest typen generic X. Udowodnić, że H jest spójna, tzn. $H = H^0$.