Teoria stabilności I, Lista 2

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ (tzn. w modelu $\bar{\kappa}$-nasyconym i silnie $\bar{\kappa}$-jednorodnym dla dostatecznie dużej silnie granicznej liczby $\bar{\kappa}$) stabilnej teorii T.

Zadanie 1. Niech $p \in S(\mathfrak{C})$ i $A \subseteq \mathfrak{C}$ (zgodnie z konwencją $|A| < \bar{\kappa}$). Udowodnić, że p nie forkuje się nad A wtedy i tylko wtedy, gdy orbita p względem działania $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ jest ograniczona (tzn. mocy mniejszej niż $\bar{\kappa}$).

Zadanie 2. (i) Przypomnijmy, że T jest *całkowicie przestępna*, gdy $RM(x = x) < \infty$. Udowodnić, że jeśli T jest całkowicie przestępna, to jest ona stabilna we wszystkich mocach $\geqslant |T|$, czyli jest superstabilna.
(ii) Udowodnić, że jeśli T jest ω-stabilna, to $RM(x = x) < \infty$ i że implikacja odwrotna zachodzi, gdy T jest przeliczalna.
(iii) Pokazać, że T jest całkowicie przestępna wtedy i tylko wtedy, gdy redukt T do każdego przeliczalnego podjęzyka jest ω-stabilny (w szczególności, gdy język jest przeliczalny, całkowita przestępność jest równoważna ω-stabilności).
(iv) Udowodnić, że T jest całkowicie przestępna wtedy i tylko wtedy, gdy $RM(\bar{x} = \bar{x}) < \infty$ dla dowolnego (skończonego) ciągu zmiennych $\bar{x}$.
Uwaga. Czasami ω-stabilność rozpatruje się wyłącznie dla języków przeliczalnych.

Zadanie 3. Załóżmy, że T jest całkowicie przestępna. Niech $S(A) \ni p \subseteq q \in S(B)$. Korzystając z zadania 1, dowieść, że $p \subseteq_{nf} q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $RM(p) = RM(q)$. Wywnioskować, że p jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy krotność Morleya p wynosi 1.

Zadanie 4. i) Udowodnić lemat z wykładu opisujący podstawowe własności rangi R^∞ (dla Def. 1 oraz Def. 2).
ii) Udowodnić, że definicja rangi $R^\infty := R_{L,\infty}$ podana na pierwszym wykładzie oraz Def. 1 rangi R^∞ podana na drugim wykładzie są równoważne.
iii) Udowodnić równoważność Def. 1 i Def. 2 rangi R^∞ podanych na ostatnim wykładzie.

Zadanie 5. Dla niesprzecznych formuł $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$, takich że $\varphi(x)$ jest *zdefiniowana nad* A (tzn. ma parametry z A) definiujemy

$$\psi(x) <_A \varphi(x) \iff \models \psi(x) \longrightarrow \varphi(x) \text{ i } \psi(x) \text{ forkuje się nad } A.$$

Ponadto definiujemy

$$\psi(x) < \varphi(x) \iff \psi(x) <_A \varphi(x) \text{ dla pewnego } A \text{ jak wyżej.}$$

Udowodnić, że $<$ jest ostrym porządkiem częściowym, tzn. jest tranzytywny i przeciwzwrotny (a więc antysymetryczny).

Zadanie 6. Dla niesprzecznych formuł $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$, takich że $\varphi(x)$ jest *definiowalna nad* A (tzn. równoważna formule z parametrami z A) definiujemy

$$\psi(x) <'_A \varphi(x) \iff \models \psi(x) \longrightarrow \varphi(x) \text{ i } \psi(x) \text{ forkuje się nad } A.$$

Ponadto definiujemy

$$\psi(x) <' \varphi(x) \iff \psi(x) <'_A \varphi(x) \text{ dla pewnego } A \text{ jak wyżej.}$$

Porównać porządek $<'$ z porządkiem $<$ z poprzedniego zadania. Udowodnić, że prowadzą one do tej samej rangi R^∞ (zdefiniowanej jako ranga ufundowania odpowiedniego porządku).

Zadanie 7. Niech $S(A) \ni p(x) \subseteq q(x) \in S(B)$. Udowodnić, że jeśli $R^\infty(p) = R^\infty(q) < \infty$, to q nie forkuje się nad A.

Zadanie 8. Niech $<^*$ będzie ostrym porządkiem częściowym na zbiorze wszystkich typów zupełnych (nad dowolnymi zbiorami parametrów z modelu monstrum) zadanym przez $p <^* q \iff q \subseteq_f p$. Dowieść, że $<^*$ jest (dobrze) ufundowany wtedy i tylko wtedy, gdy $U(p) < \infty$ dla każdego typu zupełnego p.

Zadanie 9. Niech p i q będą typami zupełnymi. Udowodnić, że:
(i) $U(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy p jest algebraiczny,
(ii) jeśli $p \subseteq q$, to $U(p) \geqslant U(q)$.

Zadanie 10. Pokazać, że $U(ab/A) \geqslant U(a/A)$.