Teoria stabilności I, Lista 3

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ stabilnej teorii T.

Zadanie 1. Niech $R \in \{U, R^\infty, RM\}$ i niech $b \in \operatorname{acl}(Aa)$. Udowodnić, że $R(a/A) \geqslant R(b/A)$.

Zadanie 2. (i) Pokazać, że RM oraz R^∞ są niezmiennicze na definiowalne bijekcje, tzn. jeśli $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są formułami, a $f : \varphi(\mathfrak{C}) \to \psi(\mathfrak{C})$ jest definiowalną bijekcją, to $RM(\varphi(x)) = RM(\psi(x))$ oraz $R^\infty(\varphi(x)) = R^\infty(\psi(x))$.
(ii) Pokazać, że jeśli f jest A-definiowalną bijekcją między pewnymi zbiorami oraz $a \in \operatorname{dom}(f)$, to $U(a/A) = U(f(a)/A)$.

Zadanie 3. Niech $p \in S(A)$ będzie stacjonarny, $\widetilde{p} = p|\mathfrak{C}$ i $f \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{C})$. Udowodnić, że:
(i) $f(\widetilde{p}) = \widetilde{p} \iff f|\operatorname{Cb}(p) = \operatorname{id}$,
(ii) $\operatorname{Cb}(p) = \{c \in \mathfrak{C} : (\forall f \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{C}))(f(\widetilde{p}) = \widetilde{p} \longrightarrow f(c) = c)\}$,
(iii) $\operatorname{Cb}(p) \subseteq \operatorname{dcl}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{p}$ nie forkuje się nad B i $\widetilde{p}|B$ jest stacjonarny.

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli T jest superstabilna, to dla każdego typu stacjonarnego $p \in S(A)$ istnieje podzdbiór skończony $A_0 \subseteq A$, taki że $\operatorname{Cb}(p) \subseteq acl(A_0)$.

Zadanie 5. Pokazać, że $\operatorname{Cb}(\operatorname{tp}(a/\operatorname{acl}(A))) \subseteq \operatorname{dcl}(A, a)$.

Zadanie 6. Udowodnić, że jeśli T jest całkowicie przestępna, to istnieje $c \in \mathfrak{C}^{eq} = \mathfrak{C}$, taki że $\operatorname{Cb}(p) = \operatorname{dcl}(c)$.

Zadanie 7. Załóżmy, że $T = ACF_p$. Niech $K \models T$ i $q \in S_n(K)$. Pokazać, że $\operatorname{Cb}(q)$ jest definiowalnym domknięciem najmniejszego ciała definicji ideału pierwszego $I_q := \{f(\overline{X}) \in K[X_1, \ldots, X_n] : (f(\overline{X}) = 0) \in q\}$.
Wyjaśnienie. Odwzorowanie $q \mapsto I_q$ zadaje bijekcję między $S_n(K)$ i zbiorem ideałów pierwszych w $K[X_1, \ldots, X_n]$. Podciało k ciała K nazywamy *ciałem definicji* ideału pierwszego $I \lhd K[X_1, \ldots, X_n]$, gdy I jest generowany przez $k[X_1, \ldots, X_n]$. Prawdziwe jest twierdzenie, mówiące że istnieje (jedyne) najmniejsze ciało definicji danego ideału. Spróbować to udowodnić (niekoniecznie na ćwiczeniach), a z dowodu wywnioskować, że najmniejsze ciało definicji k idału I ma tę własność, że $f \in \operatorname{Aut}(K)$ zachowuje punktowo k wtedy i tylko wtedy, gdy $f[I] = I$. Można z tego skorzystać w rozwiązaniu zadania.

Zadanie 8. Niech R będzie pierścieniem euklidesowym. Pokazać, że dla dowolnej macierzy $H \in M_{n\times n}(R)$ istnieją macierze odwracalne $X, Y \in M_{n\times n}(R)$, takie że XHY jest diagonalna. Spróbować udowodnić to samo dla pierścieni ideałów głównych.