Teoria stabilności I, Lista 4

R jest pierścieniem z 1, T_R jest teorią lewych R-modułów i $M \models T_R$.

Zadanie 1. Niech R będzie pierścieniem euklidesowym. Udowodnić, że każda pp-formuła $\varphi(\overline{x})$ jest T_R-równoważna koniunkcji formuł postaci $p^k \mid t(\overline{x})$ oraz $t(\overline{x}) = 0$, gdzie $t(\overline{x})$ jest R-liniową kombinacją zmiennych $\overline{x}$, $p \in R$ elementem pierwszym, a k liczbą naturalną.

Zadanie 2. Niech $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$, $\psi(\overline{x})$ i $\theta(\overline{x})$ będą pp-formułami. Udowodnić, że:
(i) $\exists \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$ jest pp-formułą,
(ii) $\psi(\overline{x}) \wedge \theta(\overline{x})$ jest pp-formułą,
(iii) $\varphi(\overline{x}, \overline{0})$ jest pp-formułą,
(iv) $\psi(M)$ jest podgrupą M^l, gdzie $l = |\overline{x}|$,
(v) dla każdego $\overline{a} \in M^k$, jeśli $\varphi(M, \overline{a}) \neq \emptyset$, to $\varphi(M, \overline{a}) = \varphi(M, \overline{0}) + \overline{b}$ dla pewnego $\overline{b} \in \varphi(M, \overline{a})$,
(vi) dla każdego $\overline{a} \in M^k$, jeśli $\varphi(M, \overline{a})$ jest podgrupą M^l, to $\varphi(M, \overline{a}) = \varphi(M, \overline{0})$.

Zadanie 3. Niech $A, A_0, \ldots, A_{n-1}$ będą zbiorami skończonymi. Udowodnić, że wtedy

$$A \subseteq \bigcup_{i<n} A_i \iff \sum_{\Delta \subseteq n} (-1)^{|\Delta|} |A \cap \bigcap_{i \in \Delta} A_i| = 0.$$

Zadanie 4. Napisać $\exists\forall$-zdanie $\chi_{\psi,\theta,n}$, takie że dla dowolnego $M \models T_R$

$$M \models \chi_{\psi,\theta,n} \iff n(\psi/\theta, M) \geqslant n.$$

Wywnioskować, że dla dowolnych lewych R-modułów M i N

$$M \equiv_{\forall\exists} N \iff M \equiv N.$$

Zadanie 5. (i) Niech $N = M \oplus M'$, gdzie N, M, M' są lewymi R-modułami. Udowodnić, że M jest czysty w N.
(ii) Niech V będzie przestrzenią liniową nad pierścieniem z dzieleniem, a W – jej podprzestrzenią. Udowodnić, że W jest czysta w V.

Zadanie 6. Niech $M \subseteq N$ będą lewymi modułami nad euklidesowym pierścieniem R. Dowieść, że M jest czysty w N wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in R$ oraz $m \in M$ zachodzi równoważność

$$M \models (\exists y)(ry = m) \iff N \models (\exists y)(ry = m).$$

Zadanie 7. Udowodnić, że $M^{\oplus k} \prec M^k$ dla dowolnej liczby kardynalnej $k > 0$.