Teoria stabilności I, Lista 5

R jest pierścieniem z 1, T_R jest teorią lewych R-modułów i $M \models T_R$. Ponadto p i q są typami zupełnymi nad dowolnymi parametrami z modelu monstrum $\mathfrak{C}$ teorii T_R.

Zadanie 1. Udowodnić lemat Neumanna.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeśli grupa $(G, \cdot, \dots)$ jest superstabilna, to spełnia superstabilny DCC.

Zadanie 3. Udowodnić, że jeśli R-moduł M spełnia DCC na pp-definiowalnych podgrupach, to M jest ω-stabilny.

Zadanie 4. Podać przykłady grup abelowych czystych (tzn. bez dodatkowej struktury) G, takich że:
(i) $Th(G)$ jest ω-stabilna o z góry zadanej randze Morleya,
(ii) $Th(G)$ jest stabilna, ale nie superstabilna.
Uwaga. Na wykładzie uzasadniłem, że $(\mathbb{Z}, +)$ jest superstabilna, ale nie ω-stabilna.

Zadanie 5. Udowodnić, że $p \equiv p^+ \cup p^-$.

Zadanie 6. Pokazać, że jeśli $p \subseteq q$, to $G(p) \supseteq G(q) \supseteq G_0(q) \subseteq G_0(p)$.

Zadanie 7. Udowodnić, że:
(i) $\mathcal{G}(p)$ i $\mathcal{G}_0(p)$ są zamknięte na skończone przekroje,
(ii) $[G(p) : G_0(p)] \leqslant 2^{|T|}$,
(iii) jeśli $p \subseteq q$ i $G_0(p) = G_0(q)$, to dla każdej grupy $H \in \mathcal{G}(q)$ istnieje $H' \in \mathcal{G}(p)$, taka że $[H' : H \cap H'] < \omega$,
(iv) nie istnieje definiowalna podgrupa H grupy addytywnej $\mathfrak{C}$, taka że $1 < [G_0(p) : G_0(p) \cap H] \leqslant 2^{|T|}$.

Zadanie 8. Udowodnić, że jeśli $p \subseteq q$, to

$$G_0(p) = G_0(q) \iff [G(p) : G(q)] \leqslant 2^{|T|}.$$

Zadanie 9. Udowodnić, że $G_0(p) = G(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy p jest stacjonarny.