Teoria stabilności I, Lista 6

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ stabilnej teorii T.

Zadanie 1. Udowodnić, że $\kappa^*(T) \leqslant \kappa(T)$ oraz $\kappa_r^*(T) = \kappa_r(T)$.

Zadanie 2. Niech $p, q \in S(A)$.
(i) Udowodnić, że $p \perp^w q$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $a \models p$ i $b \models q$ zachodzi $tp(a/A) \vdash tp(a/Ab)$.
(ii) Udowodnić, że jeśli p i q są stacjonarne, to $p \perp^w q \iff p \perp^a q$.

Zadanie 3. Pokazać, że w definicji ortogonalności typów można rozważać tylko takie C, dla których $C \setminus (A \cup B)$ jest skończony.

Zadanie 4. Niech $\{p_i : i \in I\} \subseteq S(A)$ będzie rodziną typów stacjonarnych. Definiujemy

$$\bigotimes_{i \in I} p_i = tp((a_i)_{i \in I}/A),$$

gdzie $(a_i)_{i \in I}$ jest A-niezależnym ciągiem, takim że $a_i \models p_i$ dla wszystkich $i \in I$. Udowodnić, że definicja ta nie zależy od wyboru ciągu $(a_i)_{i \in I}$ i że typ $\bigoplus_{i \in I} p_i$ jest stacjonarny.

Zadanie 5. Pokazać, że jeżeli $p_1, \ldots, p_n$ i $q_1, \ldots, q_m$ są typami stacjonarnymi, takimi że każdy p_i jest ortogonalny do każdego q_j, to $p_1 \otimes \cdots \otimes p_n \perp q_1 \otimes \cdots \otimes q_m$.

Zadanie 6. Niech $p, q \in S(A)$ będą stacjonarne.
(i) Udowodnić, że jeśli dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $p^{(n)} \perp^w q^{(n)}$, to również dla każdego $\alpha \in Ord$ mamy $p^{(\alpha)} \perp^w q^{(\alpha)}$.
(ii) Udowodnić, że jeśli $p \perp q$, to dla każdego $\alpha \in Ord$ mamy $p^{(\alpha)} \perp q^{(\alpha)}$. Wywnioskować, że wtedy również $p^{(\alpha)} \perp^w q^{(\alpha)}$ dla wszystkich $\alpha \in Ord$.