Teoria stabilności I, Lista 7

Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{eq}$ stabilnej teorii T.

Zadanie 1. Udowodnić, że:
(i) jeśli $A_0 \subseteq A$, $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A$ i $B \lhd_{A_0} C$, to $B \lhd_A C$,
(ii) jeśli $A_0 \subseteq A$, $BC \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A$ i $B \lhd_A C$, to $B \lhd_{A_0} C$,
(iii) jeśli $B_0 \subseteq B$, $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ i $B \lhd_A B_0 \cup C$, to $B \lhd_A B_0$,
(iv) jeśli rodzina $\{A_i : i \in I\}$ jest C-niezależna i dla każdego $i \in I$, $B_i \lhd_C A_i$, to rodzina $\{B_i : i \in I\}$ też jest C-niezależna,
(v) jeśli $A \supseteq B \supseteq C \supseteq D$, $A \lhd_C B$ i $B \lhd_D C$, to $A \lhd_D C$.

Zadanie 2. Niech $p, q \in S(A)$.
(i) Udowodnić, że $\lhd$ jest przechodnia na typach (stacjonarnych). Wywnioskować, że dominacyjna równoważność jest relacją równoważności.
(ii) Udowodnić, że jeśli $p, q, r \in S(A)$ są typami stacjonarnymi oraz $p \lhd q$, to $p \otimes r \lhd q \otimes r$.
(iii) Niech $p_1, \ldots, p_n \in S(A)$ oraz $q_1, \ldots, q_n \in S(B)$ będą typami stacjonarnymi, takimi że $p_i \square q_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Pokazać, że wtedy $p_1 \otimes \cdots \otimes p_n \square q_1 \otimes \cdots \otimes q_n$.

Zadanie 3. Niech $B \supseteq C$. Pokazać, że $Ba \lhd_C B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego D, takiego że $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$, zachodzi $\mathrm{stp}(a/B) \vdash \mathrm{stp}(a/BD)$

Zadanie 4. Niech M będzie a-modelem i niech $p, q \in S(M)$. Udowonić, że $p \rhd q$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $b \models p$ i $c \models q$, takie że $b \rhd_M c$.

Zadanie 5. Udowodnić, że jeśli $U(p) = \omega^\alpha$ dla pewnego $\alpha \in Ord$, to p jest regularny.

Zadanie 6. Niech $p \in S(A)$ będzie typem U-rangi 1. Definiujemy $\mathrm{acl}_A(B) := \mathrm{acl}(AB)$.
(i) Udowodnić, że dla $a \models p$ oraz dowolnego B

$$a \in \mathrm{acl}_A(B) \iff a \underset{A}{\not\smile\!\!\!\!\!\!|} B.$$

(ii) $(p(\mathfrak{C}), \mathrm{acl}_A)$ jest pregeometrią.

Zadanie 7. Niech p i q będą typami stacjonarnymi, takimi że $p \parallel q$. Pokazać, że wtedy p jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy q jest regularny.