Prof. dr hab. Krzysztof Krupiński
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 1 października 2023

Algebra I R

Program wykładu

Celem wykładu jest przedstawienie podstawowych pojęć i metod algebry abstrakcyjnej.

1. Działanie w zbiorze: łączność, przemienność, element neutralny. Przykłady działań. Definicja grupy i przykłady: grupy dihedralne, grupy permutacji i grupy macierzy.
2. Pojęcie podgrupy i przykłady. Rząd elementu grupy. Generatory grupy, grupy skończenie generowane. Grupy cykliczne: definicja, własności. Homo-, epi-, mono-, endo- i automorfizmy struktur: definicja, przykłady. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Charakteryzacja monomorfizmu grup przy pomocy jądra.
3. Dzielnik normalny, grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup. Permutacje: krótkie przypomnienie z wykładu z algebry liniowej.
4. Działanie grupy na zbiorze i na grupie przez automorfizmy. Orbita, stabilizator i twierdzenie o nich „orbit-stabilizer theorem". Warstwy i indeks podgrupy, twierdzenie Lagrange'a. Produkt półprosty grup, rozkłady grup na produkty półproste. Klasyfikacja grup małych rzędów.
5. Twierdzenie Cauchy'ego, Twierdzenia Sylowa (dowód przez działania grup), zastosowania: grupy proste rzędu mniejszego od 60 są cykliczne.
6. Torsja w grupie, grupy torsyjne i beztorsyjne. Skończenie generowane grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych.
7. Komutator, komutant, grupy rozwiązalne i twierdzenie o ich rozszerzeniach. Zastosowania tw. Sylowa do dowodów rozwiązalności grup pewnych rzędów. Krótka informacja o grupach nilpotentnych.
8. Ciąg kompozycyjny w grupie, lemat o motylu i tw. Schreiera.
9. Grupy wolne i ich podstawowe własności. Prezentacje grup.
10. Pierścień (przemienny, z jednością), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina i ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady.
11. Pierścienie szeregów formalnych i pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności. Wielomiany a funkcje wielomianowe. Twierdzenie Bezouta. Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja, własności i przykłady.

12. Ideały w pierścieniach, pierścień ilorazowy, zasadnicze twierdzenie o homomorfizmach pierścieni. Ideały pierwsze (związek z dziedzinami) i ideały maksymalne (związek z ciałami). Dziedziny ideałów głównych (PID), pierścienie noetherowskie, przykłady i kontrprzykłady.
13. Teoria podzielności w dziedzinach, relacja stowarzyszenia. Abstrakcyjna definicja najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) i największego wspólnego dzielnika (NWD). Element nierozkładalny i element pierwszy w pierścieniu. Kryteria nierozkładalności w pierścieniu wielomianów. W pierścieniu noetherowskim każdy element rozkłada się na iloczyn elementów nierozkładalnych. Pierścienie z jednoznacznością rozkładu (UFD), przykłady i kontrprzykłady. Pierścień PID jest UFD, NWD i NWW w pierścieniu UFD. Lemat i Tw. Gaussa (informacja).
14. Pierścienie Euklidesa: definicja, przykłady (pierścień wielomianów, pierścień Gaussa) i kontrprzykłady. NWW i NWD w pierścieniach Euklidesa, algorytm Euklidesa. Każdy pierścień Euklidesa jest PID, kontrprzykład na implikację przeciwną (informacja).
15. Chińskie twierdzenie o resztach. Charakterystyka ciała. Podciało. Ciała proste. Podciało proste ciała. Liczba elementów ciała skończonego.

Literatura pomocnicza

- B. Gleichgewicht, *Algebra.*
- A. Białynicki-Birula, *Algebra.*
- J. Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach.*
- G. Birkhoff, S. MacLane, *Przegląd algebry współczesnej.*
- S. Lang, *Algebra.*
- M. Kargapołow, J. Mierzlakov, *Podstawy teorii grup.*

Ćwiczenia

Listy zadań znajdują się na mojej stronie:

www.math.uni.wroc.pl/∼kkrup

Na stronie tej będą też pojawiać się inne informacje dotyczące przedmiotu.

Będzie obowiązywał następujący system zaliczania ćwiczeń. Odbędą się trzy 60-minutowe kolokwia (3.11, 8.12, 19.01). Z każdego z nich będzie można zdobyć 27 punktów. Będą też do zdobycia punkty z aktywności w czasie ćwiczeń, maksymalnie 19. Za każde poprawne rozwiązanie zadadanie przy tablicy przysługuje od 1 do 3 punktów, w zależności od stopnia trudności zadania i jakości rozwiązania. Ocenę stopnia trudności pozostawiam prowadzącemu ćwiczenia. Punkty z aktywności można również zdobywać w czasie konwersatorium. W celu uniknięcia sytuacji, w której student nic nie robi przez większość semestru, a potem na jednych ćwiczeniach zdobywa wiele punktów, wprowadzam zasadę, że na jednych ćwiczeniach można maksymalnie zdobyć 4 punkty. Zachęcam do systematycznej pracy na ćwiczeniach.

Planowane progi na poszczególne oceny:
[0,45) - 2.0, [45,55) - 3.0, [55,65) - 3.5, [65,75) - 4.0, [75,85) - 4.5, [85,100] - 5.0.

W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na jednym z kolokwiów liczba punktów zdobytych za aktywność zostaje pomnożona przez 2/3 i progi na poszczególne oceny również. Usprawiedliwienie nieobecności należy dostarczyć prowadzącemu ćwiczenia w ciągu tygodnia od daty kolokwium, którego ono dotyczy. Nieusprawiedliwiona nieobecność na kolokwium oznacza 0 punktów z tego kolokwium.

W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na dwóch lub trzech kolokwiach o zaliczeniu ćwiczeń decyduje wykładowca w trybie indywidualnym.

Zasady przenoszenia na Algebrę 1.

1. Każdy ze studentów Algebry 1R może przenieść się na Algebrę 1 do 13.11.2023, wypełniajac Formularz B2 dostępny na stronie
https://www.math.uni.wroc.pl/ogloszenia-dyrekcji.
W razie problemów należy pisać do pani Magdaleny Wyderki. Jeśli przeniesienie nastąpi po pierwszym kolokwium na Algebrze 1R, punkty zostaną odpowiednio przeliczone. Po przeniesieniu obowiązują zasady zaliczeń ogłoszone na Algebrze 1.

2. Po akceptacji przez dyr. T. Elsnera student jest zobowiązany powiadomić prof. Kowalskiego o dołączeniu do zajęć z Algebry 1.

3. Każdy ze studentów Algebry 1R, który nie skorzystał z możliwości opisanej w punkcie 1, a uzyskał z trzech kolokwiów na Algebrze 1R minimum 32 punkty (na 81 możliwych do zdobycia), może przenieść się na Algebrę 1 w okresie 22.01 – 26.01.2024, wypełniając formularz jak w punkcie 1 i natychmaist informując o tym fakcie prof. Kowalskiego. W tym przypadku:

   (a) Jeśli student osiągnął limit punktów na zaliczenie ćwiczeń na Algebrze 1R, uzyskuje na Algebrze 1 zaliczenie ćwiczeń z oceną, którą uzyskałby na Algebrze 1R.

   (b) Jeśli student nie osiągnął limitu punktów na zaliczenie ćwiczeń na Algebrze 1R, to na Algebrze 1 pisze kolokwium zaliczeniowe w terminie i trybie określonym przez prof. Kowalskiego.