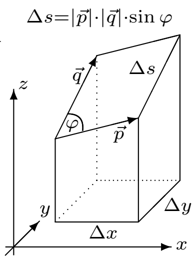
Analiza matematyczna A3, Pole płata (powierzchni)

Wyznaczymy pole powierzchni płata – to jest części wykresu funkcji $z = f(x,y)$ nad obszarem $P \subset \mathbb{R}^2$ domkniętym i ograniczonym, zawartym w dziedzinie funkcji f (przy założeniu ciągłości pochodnych cząstkowych f'_x, f'_y).

Pomysł: Bierzemy 'drobny' podział $\omega = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ obszaru P 'głównie' na prostokąty o polach Δp_i ('głównie' tzn. elementy podziału, które nie są prostokątami mają **łącznie** 'znikome' pole). Wybieramy punkty $(x_i, y_i) \in P_i$ i w przestrzeni prowadzimy płaszczyzny styczne do wykresu f w punktach $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$. Części tych płaszczyzn utworzone nad prostokątami P_i wyglądają jak karteczki (równoległoboki) oblepiające tę powierzchnię. Suma ich pól $\sum_i \Delta s_i$ przybliża szukane pole płata.



Pole Δs pojedynczego równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{p}, \vec{q}$:
Płaszczyzna styczna jest wyznaczona przez gradient funkcji f, zatem te wektory mają współrzędne: $\vec{p} = [\Delta x, 0, f'_x \cdot \Delta x]$, $\vec{q} = [0, \Delta y, f'_y \cdot \Delta y]$.
Stąd obliczamy pole (korzystając z prostoty iloczynu skalarnego):

$$\Delta s = |\vec{p}||\vec{q}| \sin\varphi = |\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{((\Delta x)^2 + (f'_x \Delta x)^2)((\Delta y)^2 + (f'_y \Delta y)^2) - (f'_x \Delta x \cdot f'_y \Delta y)^2} =$$
$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} \quad \text{(po krótkich rachunkach)}$$

Uwaga. Powyżej pominięte są indeksy '$_i$', pochodne cząstk. liczone są w punktach (x_i, y_i).

Zatem pole płata f nad P jest w przybliżeniu równe

$$\sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,\Delta x \Delta y = \sum_i \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,\Delta p_i \approx \boxed{\iint\limits_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}}$$

'$\approx$' oznacza tu: gdy weźmiemy ciąg coraz drobniejszych podziałów (o maksymalnych średnicach zbieżnych do 0), to granica sum $\sum_i \Delta s_i$ jest zbieżna do całki (z def. całki).

Przykład. Pow. płata $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ nad trójkątem P o wierzchołkach: $(0,0), (0,1), (7,1)$, czyli nad obszarem: $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le 7y$:

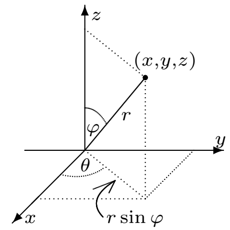
$$\iint\limits_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} = \iint\limits_P \sqrt{1+x+y} = \int_0^1 \left(\int_0^{7y} \sqrt{1+x+y}\,dx \right) dy = \ldots = \tfrac{25}{3} - \tfrac{16}{15}\sqrt{2}\ .$$

Przykład. Pow. płata $f(x,y) = xy$ nad $P = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9, 0 \le x \le y\}$ to

$$\iint\limits_P \sqrt{1 + y^2 + x^2} \overset{\text{współ. bieg.}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^3 \sqrt{1+r^2} \cdot r dr \right) d\varphi = \tfrac{\pi}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \tfrac{\pi}{12}(10\sqrt{10} - 1)$$

Uwaga. Można pomyśleć o przybliżaniu powierzchni płata w inny sposób: wybieramy na płacie skończenie wiele punktów 'gęsto rozmieszczonych (dużo)'; z nich tworzymy trójkąty (triangulację); suma pól tych trójkątów powinna przybliżać pole płata — **TEN POMYSŁ JEST ZŁY**, zły nawet w przypadku powierzchni bocznej walca; szczegóły (i rysunki) należy znaleźć np. w III tomie Fichtenholza, rozdział XVII, §2.

Układ sferyczny



Podpisując długości kresek za pomocą r, φ, θ otrzymujemy wzór

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi$$

przekształcenia z 'nieskończonego pół-prostopadłościanu'

$$0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r \ge 0$$

(w układzie $Or\varphi\theta$) na całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ (w układzie $Oxyz$).

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

W tym przekształceniu obrazem prostokąta: $r = 0$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ jest punkt $(0, \ldots, \ldots)$, a obrazem prostokąta $r = 3$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ jest sfera o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = \ldots.$ Obrazem półprostej $\varphi = \frac{\pi}{4} = \phi$ jest półprosta $x = y = \ \ldots\ldots$,
Inne przykłady (strzałka $\to$ oznacza 'jest przekształcane na'):
$\varphi = 0 \to$ półoś $O\ldots$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{\ldots} \to$ pow. stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} \to$ pł. $z = \ldots$,
$r \in\ \ldots\ \to$ obszar $4 < x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, $\quad r = 3\cos\varphi \to$ kula $x^2 + y^2 + (z-\ldots)^2 \le \ldots$,
$r = -3\cos\varphi \to$ kula $x^2 + y^2 + (z-\ldots)^2 \le \ldots$, $\quad r = \frac{4}{\cos\varphi} \to$ płaszczyzna $z = \ldots$.

Wnętrze 'pół-prostopadłościanu' jest przekształcane różnowartościowo na $\mathbb{R}^3 \setminus \ldots$.
Łatwo obliczymy jakobian tego przekształcenia (stosując wielokrotnie tw. Pitagorasa):

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi$$

Przykład. Różnicy kul $V = \{(x,y,z) : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ w ukł. sferycznym odpowiada obszar $V' = \{(r,\varphi,\theta) : 1 \le r \le 2\}$ (prostopadłościan w ukł. sfer.), więc:

$$\iiint\limits_V z^2 = \iiint\limits_{V'} r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_1^2 r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left[\tfrac{1}{5}r^5\cos^2\varphi\sin\varphi\right]_1^2 d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{31}{5}\left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi}d\theta = \tfrac{31}{5}\int_0^{2\pi}\tfrac{2}{3}d\theta = \tfrac{124}{15}\pi$$

Przykład. Obszarowi $V = \{(x,y,z) : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \wedge z^2 \ge x^2 + y^2\}$ w ukł. sfer. odpowiada prostopadłościan $V' = \{(r,\varphi,\theta) : 1 \le r \le 3 \wedge 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$, więc:

$$\iiint\limits_V x^2 = \iiint\limits_{V'} r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta \cdot r^2\sin\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_1^3 r^4\sin^3\varphi\cos^2\theta\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\left[\tfrac{1}{5}r^5\sin^3\varphi\cos^2\theta\right]_1^3 d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\tfrac{242}{5}\sin^3\varphi\cos^2\theta\,d\varphi\right)d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{242}{5}(\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi)\cos^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{242}{5}\left(\tfrac{\sqrt{2}^3}{3\cdot 2^3} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{3} + 1\right)\cos^2\theta\,d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\tfrac{121(8-5\sqrt{2})}{30}\cos^2\theta\,d\theta = \tfrac{121(8-5\sqrt{2})}{30}\left[\tfrac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = \tfrac{121(8-5\sqrt{2})}{30}\pi\ .$$

Przykład. Powierzchnia $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8z$ ma w ukł. sfer. równanie ...... , więc ogranicza obszar o obj. ...... (wskazówka: zauważ, że jest obrotowa i $z \ge 0$).

Analiza matematyczna A3, Przykady $\iint\limits_P f\, dP$, $\iiint\limits_V f\, dV$

Takich zadań nie będzie na najbliższej kartkówce, ale będą podobne

1. Przedstaw całkę $J = \iint\limits_P xy\, dP$ jako całkę iterowaną we współrzędnych

a) biegunowych **b)** kartezjańskich,

gdy P jest największym z obszarów ograniczonych liniami $y+|x| = 0$, $x^2+y^2+2y = 0$. Oblicz też wartość J.

Rozwiązanie zad. 1

Po zrobieniu rysunku widać, że $P = \{(x, y) : y \le -|x| \ \wedge x \in [-1, 1]\}$ skąd

ad b) $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1-\sqrt{1^2-x^2}}^{-|x|} xy\, dy \right) dx$

Widać też, że P we współrzędnych biegunowych można zapisać:
$P = \{(r, \varphi) : \varphi \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi] \ \wedge \ 0 \le r \le 2\sin(\varphi - \pi)\}$ skąd

ad a) $J = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int_0^{2\sin(\varphi-\pi)} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\, dr \right) d\varphi$

Obliczamy (z a))

$$J = \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int\limits_0^{2\sin(\varphi-\pi)} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\, dr \right) d\varphi = \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int\limits_0^{-2\sin(\varphi)} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, dr \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \cos\varphi \sin\varphi \right]_0^{-2\sin(\varphi)} d\varphi = \int\limits_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} 4\cos\varphi \sin^5\varphi\, d\varphi = \left[\frac{4}{6} \sin^6\varphi \right]_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} = 0.$$

Uwaga. Z symetrii P i własności funkcji xy widać (bez rachunków) $J = 0$.

2. Przedstaw całkę $I = \iiint\limits_V x^2 + y^2 + z^2\, dV$ jako całkę iterowaną we współrzędnych

a) cylindrycznych **b)** sferycznych **c)** kartezjańskich,

gdy V jest mniejszą z brył ograniczonych pow. $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Oblicz też wartość I.

Rozwiązanie zad. 2

Najpierw ogladamy V w przecięciu z płaszczyzną $y = 0$: $z = \sqrt{3} \cdot |x|$, $x^2 + z^2 = 4$.
Widać część koła. *[zrób rysunek!]*
Po zakręceniu tym wokół osi OZ, widać... rożek z gałką lodów.
Zobacz jaki jest kąt tego rożka. *[zrób rysunek!]*

Zatem $V = \{(x, y, z) : \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}\}$.

Przed rachunkami zobaczmy gdzie powierzchnie się stykają:
układ równań $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *[zrób rysunek!]*
jest równoważny z układem $x^2 + y^2 = 1 \wedge z = \sqrt{3}$.
(Stąd: rzutem V na pł OXY jest koło $x^2+y^2 \le 1$, czego formalnie nie wykorzystamy.)

ad c) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1^2-x^2}}^{\sqrt{1^2-x^2}} \left(\int_{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2\, dz \right) dy \right) dx$

ad a) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r^2 + h^2 \cdot r\, dh \right) dr \right) d\varphi$

ad b) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \left(\int_0^2 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$

Liczyć warto na pewno z postaci w b):

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi/6} \left(\int\limits_0^2 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi/6} \left[\frac{1}{5} r^5 \sin\varphi \right]_0^2 d\varphi \right) d\vartheta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{2^5}{5} \cos\varphi \right]_0^{\pi/6} d\vartheta = \left[-\frac{2^5}{5} (\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0) \cdot \vartheta \right]_0^{2\pi} = \frac{32}{5}(2 - \sqrt{3})\pi$$