Analiza matematyczna A3, Lista 1.

1. Funkcja $F : [-1,2] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $F(t) = (t^2+1, 3t^2+4)$ przekształca punkty przedziału ...... na punkty płaszczyzny; np.: $F(-1) = (2, ...)$, $F(-0.5) =$ ... .

a) Czy p-kty $(3.25, 10.75), (1.09, 4.27), (2.69, 9.07)$ należą do zbioru wartości F?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki? Uzasadnij, że środek tego odcinka jest w zbiorze wartości.

Uwaga. Mówimy też: $x(t) = t^2+1$, $y(t) = 3t^2+4$, $-1 \le t \le 2$ jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest: $x = t^2+1$, $y = 3t^2+4$, $0 \le t \le 2$.

Powtórz b) dla:

c) $G(t) = (|t|+1, 3|t|+4)$, $|t| \le 4$, $H(t) = (|t|, 3|t|+1)$, $t \in [1,5]$

d) $x = \sin t + 1$, $y = 2\sin t + 3$, $-4\pi \le t \le 2\pi$

e) $x = 2-3t$, $y = -4t$, $0 \le t \le 12$ **f)** $x = e^t$, $y = e^{4+t}+3$, $0 \le t \le \log 5$

2. Zaznacz łuki opisane parametrycznie: (wyznacz zbiory wartości funkcji):

a) $x = \cos(2\pi t)+1$, $y = \cos(2\pi t)+3$, $t \in [-2,1]$.
b) $x = 3\cos(2\pi t)+1$, $y = 3\cos(2\pi t)+3$, $t \in [-2,1]$.
c) $x = 3\cos(2\pi t)+1$, $y = 3\sin(2\pi t)+3$, $t \in [-2,1]$.
d) $x = 2\cos(2\pi t)+1$, $y = 3\sin(2\pi t)+3$, $t \in [-2,1]$.
e) $x = 2\cos(2\pi t)+1$, $y = 3\cos^2(2\pi t)+3$, $t \in [-2,1]$.
f) $x = 2\cos(2\pi t)+1$, $y = 3\sin^2(2\pi t)+3$, $t \in [-2,1]$.
g) $x = t$, $y = -\sqrt{4-t^2}$, $t \in [-2,2]$.
h) $x = -\sqrt{4-t^2}$, $y = 4-t^2$, $t \in [-2,2]$.
i) $x = \min\{t, 1-t\}, y = \max\{t, 1-t\}$, $t \in [-1,1]$.
j) $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 4t$, $t \in [1,2]$.
k) $x = 2t+3$, $y = 3t+4$, $z = 4t+5$, $t \in [-1,3]$.
ℓ) $x = 2t^2+3$, $y = 3t^2+4$, $z = 4t^2+5$, $t \in [0,2]$.
m) $x = 2t^2+3$, $y = 3t^2+4$, $z = 4t^2+5$, $t \in [-1,2]$.

3. a) Czy jadące pojazdy A i B:

$$x_A = t+1,\ y_A = 4t+3,\ t \in \mathbb{R}_+ ,\quad x_B = t-5,\ y_B = 2t+1,\ t \in \mathbb{R}_+$$

kiedyś zderzą się? Jeśli tak, to kiedy? Jeśli nie, to jak blisko siebie miną?

b) Podaj takie parametryzacje przy $t \in [0,1]$ odcinków: $(0,0)(1,5)$ i $(0,2)(9,0)$, które opisują ruch punktów które się 'zderzą' w punkcie przecięcia tych odcinków.

4. Podaj opis jakiejś wędrówki:
a) po łamanej $\{(x,y) : y = |x| \wedge x \in [-2,2]\}$
b) po łamanej $\{(x,y) : y = ||x-1|-2| \wedge x \in [-5,5]\}$
c) po brzegu kwadratu o wierzchołkach: $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$
d) po brzegu jakiegoś trójkąta **e)** po ósemce

5. Wzór $M(t) = (5\cos(\pi/2 - 2\pi t),\ y = 5\sin(\pi/2-2\pi t))$, $t \in [0,24]$ opisuje położenie końca minutowej wskazówki (o długości ...) zegarka jako funkcję czasu.
a) Opisz ruch końca małej wskazówki (o długości 3)
b) Opisz długość odcinka łączącego końce wskazówek (jako funkcję czasu).
c) Jak zmienić powyższe, gdy zegar późni się (jednostajnie) 5 minut na dobę?

6. Zbiór wartości funkcji $F : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nazywany jest *linią śrubową*. Opisz gwint śruby o średnicy 12mm i skoku 2mm.

7. W których z opisanych ruchów szybkość jest stała, czyli $||v(t)|| = \text{const}$?

8. Opisz ruch po okręgu, w którym największa szybkość osiągana jest 'na dole'.

* * *

c0. Podaj 5 wyrazów ciągu: **a)** $a_n = \left(3 - 1/2^n, 1/n^2\right)$ **b)** $b_k = (k, 1/k)$

c1. Wypełnianka. Udowodnimy, że granicą ciągu $a_n = \left(\frac{1}{......}, \frac{n-1}{......}\right)$ punktów płaszczyzny ($\mathbb{R}^2$) jest punkt $g = (..., ...)$. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$||a_n - (0,1)|| = \sqrt{\left(\frac{1}{2n+3} - ...\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n} - ...\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(2n+3)^2} + \frac{1}{n^2}} =$$
$$= \frac{1}{n(2n+3)}\sqrt{5n^2+12n+9} \le \frac{1}{n(2n+3)}\sqrt{26n^2} = \frac{......}{2n+3} .$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla każdego naturalnego $n \ge$ ...... mamy $||a_n - g|| < \varepsilon$ □

c2. Odgadnij granicę g ciągu a_n i udowodnij wprost z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdy

a) $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n-2}{n^2-4}\right)$ **b)** $a_n = \left(\frac{\sin(n\pi/6)}{n}, \frac{1}{n+3}\right)$ **c)** $a_n = \left(\frac{\sin n}{n^2}, \frac{\cos n}{n^3}\right)$

c3. Udowodnij wprost z definicji, że $(1,0)$ nie jest granicą ciągu $a_n = \left(n \sin\frac{1}{n}, \sin(\frac{n\pi}{3})\right)$.

c4. Podaj po trzy przykłady ciągów $a_n = (a'_n, a''_n)$ zbieżnych do (0,0) i takich, że

a) $0 < a'_n < n \cdot a''_n$ **b)** $\lim \frac{a'_n}{a''_n} = 17$ **c)** $\lim \frac{a'_n}{a''_n} = -\infty$ **d)** $\lim \frac{a''^n_n}{a'_n} = \infty$

c5. Karol Omyłek (jak to Karol) wypowiedział błędne zdania. Gzie są błędy?
a) Każdy rosnący i ograniczony ciąg punktów płaszczyzny jest zbieżny.
b) Jeżeli ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny do π i ciąg (y_n) ma podciąg zbieżny do e, to ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem $a_n = (x_n, y_n)$, ma podciąg zbieżny do (π, e).