ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 10.

1. Oblicz całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (nieskierowane)

$\int_A |x| + y\, ds,\ A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\},\qquad \int_B x(\mathrm{arctg} y)^7\, ds,\ B = \{(x,x^2) : |x| \le 1\}$

$\int_C x + y\, ds,\ C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2x + 4y\},\ \int_C xy\, ds,\quad \int_D \frac{ds}{x^2},\ D = A \cap ([\frac{1}{2}, 2] \times \mathbb{R})$

$\int_E x^2 y\, ds,\ E = A \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)\qquad \int_F \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\, ds,\ F = \{(x,x^2) : -1 \le x \le 2\},\ \int_F x\, ds$

$\int_G x + y + z\, ds$, G - odcinek łączący punkty $(1,2,3)$ i $(6,5,4)$, $\qquad \int_G xyz\, ds$

2. Oblicz: całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (skierowane)

$\int_A (2x + 3y)dx + (4x + 5y)dy$, $\quad A$ – odcinek od $(0,1)$ do $(3,3)$

$\int_B (2x + y)dx + (2x - y)dy$, $\quad B$ – część paraboli $y = x^2$ od $(1,1)$ do $(2,4)$

$\int_C (x^2 + y)dx + (x - y)dy$, $\quad C$ – część paraboli $y^2 = x$ od $(1,-1)$ do $(1,1)$

$\int_D (x^2 + y)dx + (x - y)dy$, $\quad D$ – część paraboli $y^2 = x$ od $(1,1)$ do $(1,-1)$

3. Znajdź masę pierwszego zwoju linii śrubowej $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = bt$ gdy gęstość w każdym punkcie jest proporcjonalna do kwadratu odległości od (0,0,0).

4. Wznacz pracę potrzebną do przeniesienia 1kg pokonując pole sił $\vec{F} = [x^2 - y, xy]$ wzdłuż linii $y^2 = 8x$ od punktu $A(0,0)$ do punktu $B(2,4)$.

5. Oblicz całki po pewnych <u>dwóch</u> drogach (łukach) od A do B.

a) $\int_\Gamma (\pi x + y)\, dx + (x - \sqrt{2}y)\, dy$, $\qquad A = (0,1),\ B = (2,3)$

b) $\int_\Gamma (e^x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy$, $\qquad A = (0,1),\ B = (u,v)$

c) $\int_\Gamma y\, dx + (x + z)\, dy + y\, dz$, $\qquad A = (-1,1,0),\ B = (u,v,w)$

d) $\int_\Gamma (\cos x + 2yz)dx + (\sin y + 2xz)dy + (z + 2xy)dz,\ A = (0,0,0),\ B = (\pi, \pi, \pi^{-1})$

6. Czy pole wektorowe ma potencjał? Jeśli tak, to oblicz je lub odgadnij.

a) $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ **b)** $\vec{F}(x,y) = (y,x)$ **c)** $\vec{F}(x,y) = (x^2, y^2)$

d) $\vec{F}(x,y) = (y^2, x^2)$ **e)** $\vec{F}(x,y) = (xy^2, x^2y + y^3)$ **f)** $\vec{F}(x,y) = (ye^x, e^x)$

g) $\vec{F}(x,y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$ **h)** $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$

i) $\vec{F}(x,y) = (e^y, xe^y + y)$ **j)** $P(x,y) = y^2e^{xy},\ Q(x,y) = (1 + xy)e^{xy}$

k) $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$ **l)** $P = yz,\ Q = xz,\ R = xy$

m) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$ **n)** $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,z,y)$

5'. Pokaż, że całki z zad. 5 zależą tylko od początku i końca łuku Γ.

7. Niech f, g, h będą ciągłymi funkcjami **jednej** zmiennej. Udowodnij, że całka $\int_\Gamma f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$ nie zależy od drogi Γ (zależy tylko od początku i końca).

8. Dla podanego pola wektorowego i obszaru Ω oblicz całki występujące po obu stronach wzoru Greena.

a) $(P(x,y), Q(x,y)) = (x,y), \quad \Omega = \{(x,y); x^2 \le y \le 1\}$

b) $(P(x,y), Q(x,y)) = (x,-y), \quad \Omega = \{(x,y); 1 + y^2 + x^2 \le 2x + 2y\}$

c) $(P(x,y), Q(x,y)) = (xy, 0), \quad \Omega = \{(x,y); x, y \in [0,1],\ x^2 + y^2 \le 1\}$

d) $(P(x,y), Q(x,y)) = (xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2}) \quad \Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\}$

e) $(P(x,y), Q(x,y)) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}), \quad \Omega = \{(x,y); 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$,

Do e.) brzeg Ω to 2 okręgi: zewnętrzny skierowany przeciwzegarowo, wewnętrzny zegarowo

9. Zastosować wzór Greena do obliczenia całek (krzywe są skierowane przeciwzegarowo)

a) $\oint\limits_{x^2+5y^2=17} x^{2004}e^{2005y}dx + x^{2005}e^{2005y}dy$ **b)** $\oint\limits_{x^{1998}+y^{2000}=1} e^{(x+y)^7}dx + e^{(x+y)^7}dy$

10. Niech $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \ge 0\}$, $L = \{(x,y) : x^2 \le 1, y = 0\}$, $M = \{(x,y) : y = |x| - 1, x^2 \le 1\}$ oznaczają krzywe skierowane <u>od</u> $(1,0)$ <u>do</u> $(-1,0)$. Oblicz: $\int_K P\,dx + Q\,dy$, $\int_M P\,dx + Q\,dy$ wiedząc, że

a) $Q'_x - P'_y = 6$ i $\int_L P\,dx + Q\,dy = 2$ $\qquad$ **b)** $Q'_x - P'_y = x^{17}$ i $\int_L P\,dx + Q\,dy = \sqrt{2}$

* * *

ŚCIĄGA.

$f(x,y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P,Q)$, gdy $P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$f(x,y,z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P,Q,R)$, gdy $\vec{F} = grad(f)$.

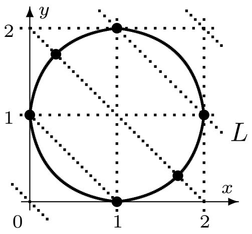
TWIERDZENIE GREENA.

Niech K będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwzegarowo) ograniczającą obszar Ω i niech $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω. Gdy funkcje $P(x,y), Q(x,y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe, to zachodzi

$$\iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, d\omega = \int\limits_K P dx + Q dy\ .$$

Analiza matematyczna A3, Notatki krzywoliniowe

Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju.



Dla okręgu L o parametryzacji

$x(t) = 1 + \cos t, y(t) = 1 + \sin t,\ 0 \le t \le$ ... ,

punkty $0,\ \frac{\pi}{2},$ ... , $\pi,$ ...... , ... , ...

generują podział L na ...... części

o długościach ...... , ... , ... , ... , ... , ...

Funkcja $f(x, y) = [x + y]^2$ jest na tych częściach stała. Zatem:

$\int_L [x+y]^2\, ds = 9 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \ldots \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots \cdot \frac{\pi}{4} = 7\pi.$

Dla tego okręgu z **inną** parametryzacją:

$$x(t) = 1 + \sin t, y(t) = 1 + \cos t,\ \ldots\ \le t \le 3\pi$$

(oznaczmy go L_1), mamy: $\int_{L_1} 3[x+1]^3 + 2[y]^2\, ds =$ ... + ... + ... + ... = ...

1. Wskaż (o ile istnieją) takie podziały krzywej Γ i punkty (x_i, y_i), że

$$\sum_i f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i = \int_\Gamma f(x, y)\ ds\ .$$

a) $\int_\Gamma [y] \cdot 2^{-1/2}\, ds,\ \int_\Gamma [x+y] + \pi\, ds,\ \int_\Gamma y + 1\, ds,\ \int_\Gamma x + 3y + 1\, ds,\ \int_\Gamma x + [y]^2 + 1\, ds$

dla $\Gamma \in \{A, B, C, D, E\}$, gdzie

$$A = \{(x, |x-1|) : |x| \le 2\}, \quad B = \{(|y|, y) : |y| \le 3\},$$

$$C = \{(x, y) : |x| + |y| = 3\}, \quad D = \{(x, y) : |x| + |y| = \tfrac{5}{2}\}, \quad E = \text{brzeg } [0,1]^2\ .$$

b) $\int_\Gamma 1\ ds\ \ \int_\Gamma [y]/\pi\ ds,\ \int_\Gamma [x] + [y] + \sqrt{2}\, ds,\ \int_\Gamma [y]^2 + 7[x] - 3\, ds,$

gdzie $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\}$, lub $\Gamma = \{(x, y) : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1\}$.

* * *

Gdy $\vec{r} : [a, b] \to \Gamma,\ \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\ dt.$$

Przykład. Gdy Γ jest łamaną ABC, gdzie $A(0,1,0), B(2,2,3), C(2,2,1)$, to parametryzujemy oddzielnie AB i BC np. $\vec{r}_{AB} : [0,1] \to \overline{AB},\ \vec{r}_{AB} = (2t, 1+t, 3t)$ i $\vec{r}_{BC} : [0,2] \to \overline{BC},\ \vec{r}_{BC} = (2, 2, 3-t)$. Wtedy $\int_\Gamma \ldots = \int_{\overline{AB}} \ldots + \int_{\overline{BC}} \ldots$

$$\int_\Gamma xe^{y-1} + 2z ds = \int_0^1 (2te^t + 6t) \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} dt + \int_0^2 (2e^1 + 6 - 2t) \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} dt =$$

$$= \sqrt{14} \cdot [2te^t - 2e^t + 3t^2]_0^1 + [(2e + 6)t - t^2]_0^2 = 5\sqrt{14} + 4e + 8\ .$$

Całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (skierowane).

Parametryzacja $x_t = 3 + \mathrm{sgn}(\cos t) \cdot \cos^2 t,\ y_t = 1 + \mathrm{sgn}(\sin t) \cdot \sin^2 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ opisuje linię będącą brzegiem kwadratu (NARYSUJ to!).

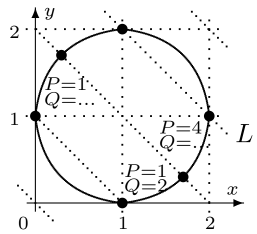
Punkty (x_{t_j}, y_{t_j}), gdzie $t_j = \frac{j\pi}{2},\ j = 0, 1, ..., 4$, wyznaczają podział L na 4 części.

Dla funkcji $P(x, y) = x + y,\ Q(x, y) = 2y$ i punktów $\hat{t}_j = \frac{(2j+1)\pi}{4},\ j = 0, 1, 2, 3$:

$$\sum_{i=0}^{\ldots} P(x_{\hat{t}_j}, y_{\hat{t}_j}) \cdot (x_{t_{j+1}} - x_{t_j}) + Q(x_{\hat{t}_j}, y_{\hat{t}_j}) \cdot (y_{t_{j+1}} - y_{t_j}) =$$

$$= (\ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots) + (\ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots) + (\ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots) + (\ldots \cdot \ldots + \ldots \cdot \ldots) = \ \ldots\ldots\ .$$

Jest to pewne przybliżenie całki $\int_L P dx + Q dy$. Dokładna wartość jest równa ....



Dla okręgu L o parametryzacji

$x(t) = 1 + \cos t, y(t) = 1 + \sin t,\ 0 \le t \le$ ... ,

i dla $P(x, y) = [x+y]^2, Q(x, y) = [x] + [y+1]^3$ mamy:

$\int_L P dx + Q dy = \int_L [x+y]^2\, dx + ([x] + [y+1]^3)\, dy =$

$= (9 \cdot (-1) + 9 \cdot 1) + \Big(4 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 8 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)\Big) +$

$+ \Big(1 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + \ldots \cdot (-\frac{\ldots}{2})\Big) + (\ldots \cdot 1 + \ldots \cdot (-1)) + \ldots = \ldots$

Dla tego okręgu z **inną** parametryzacją L_1: $x(t) = 1 + \sin t, y(t) = 1 + \cos t, \pi \le t \le 3\pi$

$$\int_{L_1} [x+y]^2\, dx + ([x] + [y+1]^3)\, dy = (0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) + \Big(1 \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \ldots \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) + \ldots =$$

$$= -\int_L [x+y]^2\, dx + ([x] + [y+1]^3)\, dy\ .$$

Ogólnie: gdy Γ oznacza łuk od A do B (gdzie porządek jest wyznaczony przez pewną parametryzację), to przez $-\Gamma$ rozumiemy ten sam zbiór punktów, ale uporządkowany przeciwnie: od B do A; wtedy $\int_{-\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = -\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz\ .$

Gdy $\vec{r} : [a, b] \to \Gamma,\ \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to całkę skierowaną zamieniamy na 'zwykłą': $\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \int_a^b P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt}\ dt$

Przykład. Gdy Γ jest łamaną ABC, gdzie $A(0,1,0), B(2,2,3), C(2,2,1)$, to parametryzujemy oddzielnie AB i BC np. $\vec{r}_{AB} : [0,1] \to \overline{AB},\ \vec{r}_{AB} = (2t, 1+t, 3t)$ i $\vec{r}_{BC} : [0,2] \to \overline{BC},\ \vec{r}_{BC} = (2, 2, 3-t)$. Wtedy $\int_\Gamma \ldots = \int_{\overline{AB}} \ldots + \int_{\overline{BC}} \ldots$ i

$$\int_\Gamma z^2 dx + xz dy + y dz = (\int_{\overline{AB}} z^2 dx + xz dy + y dz) + (\int_{\overline{BC}} z^2 dx + xz dy + y dz) =$$

$$= \int_0^1 (3t)^2 \cdot 2 + 2t \cdot 3t \cdot 1 + (1+t) \cdot 3\, dt + \int_0^2 (3-t)^2 \cdot 0 + 2 \cdot (3-t) \cdot 0 + 2 \cdot (-1)\, dt =$$

$$= \int_0^1 24t^2 + 3t + 3\, dt + \int_0^2 -2\, dt = \big[8t^3 + \tfrac{3}{2}t^2 + 3t\big]_0^1 + [-2t]_0^2 = 12{,}5 + (-4) = 8{,}5\ .$$