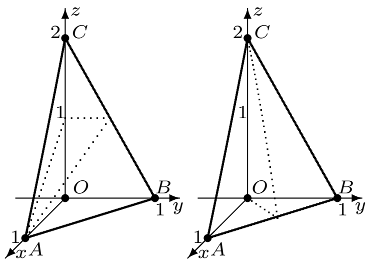
Analiza matematyczna A3. Lista 11.

1. Dla brzegu S czworościanu $0ABC$ (p.rys.) oblicz

a) $\iint_S e^{[x+y]}\,dS$ **b)** $\iint_S e^{[x-y]}\,dS$

c) $\iint_S e^{[x+z]}\,dS$ **d)** $\iint_S e^{[x+y+z]}\,dS$



1'. Poniższe całki opisują objętości pewnych ostrosłupów; opisz (słowami) te ostrosłupy

a) $\iint\limits_{ABC} z\,dS$ **b)** $\iint\limits_{ABC} x\,dS$ **c)** $\iint\limits_{ABC} x+y\,dS$

2. Oblicz (w których przykładach 'od razu' widać 0 ?)

a) $\iint\limits_{\substack{x+y+z=1\\ x,y,z\ge 0}} xyz\,dS$ **b)** $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=1\\ x,y,z\ge 0}} xyz\,dS$ **c)** $\iint\limits_{\substack{(x+y)^2+z^2=1\\ x,y,z\ge 0}} \sqrt{\frac{1-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}\,dS$

d) $\iint\limits_{|x|+|y|+|z|=1} xyz\,dS$ **e)** $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} y^7\,dS$ **f)** $\iint\limits_{2|x|+3|y|+|z|=6} |x|\,dS$

g) $\iint\limits_S xydS$, $S=\{(x,y,x^2+y^2) : x,y\in[0,1]\}$ **h)** $\iint\limits_S x+y\,dS$, $S=$ pow. $[0,1]^3$

i) $\iint\limits_\Omega x^2+y^2dS$, $\Omega=\{(x,y,x^3-3xy^2) : x^2+y^2\le 1\}$ **j)** $\iint\limits_S \operatorname{sgn}\,(z+|z|)\,dS$

3. Dla powierzchni ∂Q sześcianu $Q=[2,4]^3$ zorientowanej na zewnątrz oblicz $\iint\limits_{\partial Q}([x]+[y]+2[z])dydz+(3[x]-[z])dzdx+(\pi[x]+[y])dxdy$ oraz $\iint\limits_{\partial Q} xdydz+\pi ydzdx$.

3'. Dla powierzchni S z zad.1 i $\vec{F}=(2,3+[z],4+[z))$ oblicz $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S}$.

4. Oblicz całki powierzchniowe zorientowane (wybierz dowolnie orientację powierzchni)

a) $\iint\limits_S (x+y-z)dydz+(x+y+z)dzdx+(z+x)dxdy$, $S: 2x+3y+4z=5, x,y,z\ge 0$

b) $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=9, x,y,z\ge 0\}$

c) $\iint\limits_S y^2dzdx+zdxdy$, $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2=z^2,\ z\in[0,2]\}$

d) $\iint\limits_S zdydz+y^2dzdx+xdxdy$, $S=\{(x,y,x^2+y^2) : x,y\in[-1,2]\}$

e) $\iint\limits_W (x+2)dydz+(y+3)dzdx$, $W=\{(x,y,z) : x^2+4x+y^2+6y=0,\ z\in[2,5]\}$

f) $\iint\limits_S xdydz+e^{x+y+z}dzdx+dxdy$, S - równoległobok (1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)(1,-1,1)

5. Zastosuj twierdzenie Gaussa **a)** $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,0,0)$, $\Omega=[0,1]^3$

b) $\vec{F}(x,y,z)=(1,xy,z)$, $\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2\le 3z^2,\ 0\le z\le 3\}$

c) $\vec{F}(x,y,z)=(x,0,y^2)$, $\Omega=\{(x,y,z); x,y\in[-1,1],\ 0\le z\le(1-x^2)(1-y^2)\}$

d) $\vec{F}(x,y,z)=(x,z,y)$, $\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\le 5\}$

e) $\vec{F}(x,y,z)=(x,-y,0)$, $\Omega=\{(x,y,z); \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

f) $\vec{F}=(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$, $\Omega=\{(x,y,z); 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$

g) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$, $\Omega=\{(x,y,z); x,y,z\ge 0,\ x+y+z\le 3\}$

h) $\vec{F}(x,y,z)=(1,1,2x+2y)$, $\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2\le z\le 25\}$

i) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$, $\Omega=\{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, $a,b,c>0$

* * *

Notatki niezorientowane

Niech $f(x,y,z)$ będzie określona na powierzchni S. Podział $\omega=\{S_1,S_2,\dots,S_m\}$ powierzchni S na 'prawie rozłączne płaty' o polach $|S_i|$ i wybór punktów $a_i\in S_i$ wyznacza pewne przybliżenie **całki powierzchniowej niezorientowanej**:

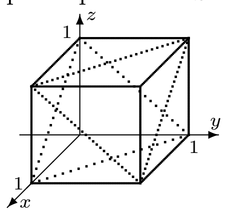
$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS\approx\sum_{i=1}^m f(a_i)\cdot|S_i|$$

Dokładniej: jeśli dla coraz drobniejszych podziałów (o średnicach zbieżnych do 0) sumy po prawej stronie są coraz bliżej pewnej liczby (niezależnie od wyboru punktów), to tę liczbę nazywamy całką powierzchniową niezorientowaną funkcji f po powierzchni S.

Interpretacje. $\iint_S f(x,y,z)\,dS$:
- masa powierzchni S, której gęstość w punkcie (x,y,z) ma wartość $f(x,y,z)$ [kg/m^2],
- koszt wyłożenia S kafelkami, których cena w (x,y,z) wynosi $f(x,y,z)$ [zł/m^2].
- objętość hałdy usypanej na S, której grubość wynosi $f(x,y,z)$ 'prostopadle' do S.

Na powierzchni S sześcianu $[0,1]^3$ $f(x,y,z)=[x+y+z]+\pi$ przyjmuje wartości: $0+\pi, 1+\pi,$ ... . Zatem

$\iint\limits_S [x+y+z]+\pi\,dS=(0+\pi)\cdot(3\cdot\frac{1}{2})+$ ...... $+$ ...... $=$ ....



Poniższa funkcja przyjmuje wartości $\neq 0$ tylko na 'górnej' ścianie

$\iint\limits_S [z]\cdot[y+7]dS=\iint\limits_{[0,1]^2\times\{1\}}[z]\cdot[y+7]dS=\iint\limits_{[0,1]^2\times\{1\}}[1]\cdot 7dS=7\cdot 1.$

Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x,y)$ określonej na obszarze D, czyli gdy $S=\{(x,y,z) : z=g(x,y), (x,y)\in D\}$, to całkę powierzchniową zamieniamy na całkę podwójną: $\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}}$

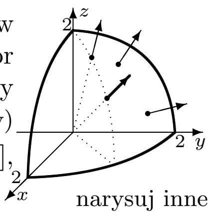
Przykład. $S=\{(x,y,z) : 2x+3y+z=6, x,y,z\ge 0\}$ jest wykresem f-cji $g(x,y)=6-2x-\dots$ o dziedzinie $D=\{(x,y) : 0\le x\le 3, 0\le y\le$ .... $\}$; zatem

$\iint\limits_S (z-6)^2\,dS=\iint\limits_D (6-2x-3y-6)^2\cdot\sqrt{1+(-2)^2+\ \dots}=\int_0^3\int_0^{\dots\dots}$ ...... $dy\,dx=\dots$

Przykład. Półsfera $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=2z, z\ge 1\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y)=1+\sqrt{1-\ \dots\ -\ \dots}$ o dziedzinie $D=\{(x,y) : \dots^2+\dots^2\le\dots\}$; zatem

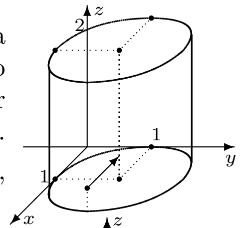
$\iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_D (1+\sqrt{1-\ \dots\dots}\,)\cdot\sqrt{1+(\ \dots\ )^2+(\ \dots\ )^2}=$ ...... (współrz. biegun.)

1. Do powierzchni $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4, x,y,z \geq 0\}$ w punkcie $P(x,y,z)$ można wystawić wektor normalny $\vec{n}$, tj. wektor prostopadły do S, o długości 1, zaczepiony w P. Wektor normalny zależy od S i P więc należałoby pisać $\vec{n}_S(x,y,z)$ (są dwa takie wektory) Np. $\vec{n}(1,1,\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot[1,1,\sqrt{2}]$, $\vec{n}(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},...) = \frac{1}{...}\cdot[\frac{\sqrt{3}}{2},...,...]$, $\vec{n}(\sqrt{3},1,...) = \frac{1}{...}\cdot[...,...,...]$. Ogólnie: $\vec{n}_S(x,y,z) = \frac{1}{...}\cdot[x,y,z]$.

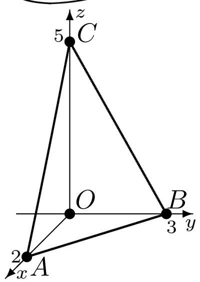


narysuj inne

2. Dla $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 2x+2y-1, 0 \leq z \leq 2\}$, tj. dla pow. bocznej walca, $\vec{n} = [-1,0,0]$ jest wektorem normalnym do B w punkcie $(2,1,\frac{1}{4})$ skierowanym do wewnątrz. Ten sam wektor $\vec{n}$ jest normalny dla punktów: $(2,...,1)$, $(...,...,\frac{5}{3})$, $(...,...,...)$ ... . $\vec{n}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \ ... \ ,\sqrt{2}) = [...,...,...]$, $\vec{n}(\ ... \ ,1-\frac{\sqrt{3}}{2},...) = [...,...,...]$, $\vec{n}(\ ... \ ,\frac{3}{2},...) = [...,...,...]$. Ogólnie: $\vec{n}_B(x,y,z) = [1-x,...,...]$.



3. Na pow. S czworościanu $OABC$ (p.rys) wektorami normalnymi (skierowanymi na zewnątrz) są: $[0,-1,0]$ dla p-tów ściany OAC, $[-1,0,0]$ dla ściany ... , $[...,...,...]$ dla ściany OAB. Dla ABC wektor normalny musi być prostopadły do leżących na ABC wektorów: $\overrightarrow{CA} = [2,0,-5]$, $\overrightarrow{CB} = [0,3,-5]$; łatwo zgadnąć, że wektor $\vec{v} = [\frac{5}{2},\frac{5}{3},1]$ jest do nich prostopadły (oblicz iloczyny skalarne $\vec{v}\circ\overrightarrow{CA}$, $\vec{v}\circ\overrightarrow{CB}$); zatem: $\vec{n}_{ABC} = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(...)^2+(...)^2+1^2}}\cdot[\frac{5}{2},\frac{5}{3},1]$.



(Zamiast zgadywać można wiedzieć, że iloczyn **wektorowy** $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ jest prostopadły do nich i normując go [dzieląc przez długość] otrzymamy $\pm\vec{n}$. Dalej pokażemy ogólny sposób.)

Niech na powierzchni S będzie zadana orientacja, tj. w każdym punkcie wybrany będzie wektor $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ normalny do S w tym punkcie i niech $\vec{F} = (P,Q,R)$ będzie polem wektorowym określonym na S. **Całka powierzchniowa zorientowana** $\iint\limits_S \vec{F}\circ d\vec{S}$ jest równa całce powierzchniowej niezorientowanej $\iint\limits_S (\vec{F}\circ\vec{n})\,dS$. Inna notacja całki powierzchn. zorientowanej to: $\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$.

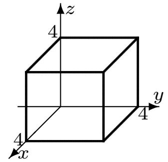
Zatem całka pow. zorient. $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S}$ jest przybliżana przez sumy: $\sum_i(\vec{F}\circ\vec{n})\cdot|S_i|$, gdzie $\vec{F}\circ\vec{n}$ oznacza długość rzutu (prostopadłego) wektora $\vec{F}$ na wektor $\vec{n}$ (oba zależą od wybranych punktów $(x_i,y_i,z_i)\in S_i$), a $|S_i|$ oznacza pole S_i z podziału pow. S.

Lapidarnie mówiąc całka zorientowana rozkłada pole $\vec{F}$ na sumę $\vec{F}_n+\vec{F}_S$ gdzie $\vec{F}_n\perp S$ a $\vec{F}_S$ 'leżą' na S oraz 'zlicza ze znakiem' długości F_n; mamy $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S} = \iint_S F_n\,dS$.

Gdy $\vec{F}$ oznacza (wektory) prędkości przepływu wody, to przez 'mały' kawałek S_i pow. S w jednostce czasu przepływa 'słup' wody o obj. $F_n\cdot|S_i|$, więc $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S}$ mierzy bilans przepływu wody przez S (w jednostce czasu i ze 'znakiem', tj. dodatnim jest przepływ na stronę powierzchni wskazywaną przez zwroty wektorów normalnych).

Dla pow. S sześcianu $[0,4]^3$ patrzymy na pary przeciwległych ścian:

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{0\leq y,z\leq 4} P(4,y,z)-P(0,y,z)\,dS + $$
$$+ \iint\limits_{0\leq x,z\leq 4} Q(x,4,z)-Q(x,0,z)dS + \iint\limits_{0\leq x,y\leq 4} R(x,y,4)-R(x,y,0)dS$$



Np. $\iint\limits_S (x+2y)\,dydz + xz\,dzdx + x^2y\,dxdy = \iint\limits_{0\leq y,z\leq 4} 4dS + \iint\limits_{0\leq x,z\leq 4} 0dS + \iint\limits_{0\leq x,y\leq 4} 0dS = 64$

Jeśli powierzchnia S jest wykresem f-cji $z(x,y)\in C^1$ określonej na obszarze D, to dla punktu $A(x,y,z(x,y))$ tej pow. wektory $\left[1,0,\frac{\partial z}{\partial x}\right]$, $\left[0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right]$ wyznaczają pł. styczną. Zatem wektor $\left[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right]$ jest prostopadły do S w p-kcie A (oblicz il. skalarne) i $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right]$ jest normalny (zadając orientację na S). Mamy:

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_S \vec{F}\circ d\vec{S} &= \iint\limits_S(\vec{F}\circ\vec{n})\,dS = \iint\limits_S(P,Q,R)\circ\Big(\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\cdot[\tfrac{\partial z}{\partial x},\tfrac{\partial z}{\partial y},-1]\Big)\,dS = \\ &= \iint\limits_D\Big(P\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-R\Big)\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\sqrt{1+(\tfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\tfrac{\partial z}{\partial y})^2} = \iint\limits_D P\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-R\end{aligned}}$$

PRZYKŁADY:

1. Półsfera $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2z, z\geq 1\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y) = 1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ o dziedzinie $D = \{(x,y) : x^2+y^2\leq 1\}$, więc np.:

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint\limits_D x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - (1+\sqrt{1-x^2-y^2}) =$$
$$= -\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 \overset{\text{wsp. bieg.}}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} + r\,dr\,d\varphi = \ ......$$

2. Powierzchnia $S = \{(x,y,z) : 0\leq z = 1-x^2-y^2\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y) = 1-x^2-y^2$ dla punktów koła $D: \ x^2+y^2\leq 1$ i $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, więc

$$\iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint_D -x\cdot(-2x)-y\cdot(-2y)+(1-x^2-y^2) =$$
$$= \iint_D 1+x^2+y^2 = |D|+\iint_D x^2+y^2 \overset{\text{wsp. bieg.}}{=} \pi+\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\varphi = \pi+2\pi\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2}\pi.$$

UWAGA. Funkcja $z(x,y)$ 'zadaje orientację do góry' pow. S, więc jeśli oryginalna orientacja S jest przeciwna, to wynik jest przeciwny: $-\frac{3}{2}\pi$.

3. Powierzchnia (boczna stożka) $\Omega: \ z^2 = x^2+y^2, \ 0\leq z\leq 4$ jest wykresem funkcji $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dla punktów koła $D: \ x^2+y^2\leq 4^2$, zatem

$$\iint\limits_\Omega (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_D -(y-\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - (\sqrt{x^2+y^2}-x)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x-y) =$$
$$= \iint\limits_D 2(x-y) \overset{\text{wsp. bieg.}}{=} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 2(r\cos\varphi-r\sin\varphi)\cdot r\,drd\varphi = 2[\sin\varphi+\cos\varphi]_0^{2\pi}\cdot[\tfrac{1}{3}r^3]_0^4 = 0.$$