

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 2.

1. Jak wyglądają wykresy funkcji: $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 - y$, $h(x, y) = x^3 - x$?

2. Podaj trzy przykłady funkcji $f(x, y)$ takich, że dla każdej pary (x, y) :

a) $f(x, y) = f(y, x)$ b) $f(x, y) = f(-x, -y)$ c) $f(x, y) = f(x, -y)$

d) $f(x, y) = f(4-x, y)$ e) $f(x, y) = f(4-x, 6-y)$ f) $f(x, y) = f(|x|, |y|)$

3. Podaj trzy przykłady funkcji $f(x, y)$ takich, że dla wykresu f :

a) $(0, 0, 0)$ jest środkiem symetrii a') $(0, 0, 3)$ jest środkiem symetrii

a'') $(1, 2, 3)$ jest środkiem symetrii b) $x = 0$ jest płaszczyzną symetrii

b') $y = \pi$ jest płaszczyzną symetrii b'') $y = x$ jest płaszczyzną symetrii

b''') $y + x = 0$ jest płaszczyzną symetrii b''') $z = 0$ jest płaszczyzną symetrii

c) prosta przechodząca przez $(0, 0, 0)$ i $(0, 0, 1)$ jest osią symetrii

c') prosta przechodząca przez $(-2, -4, 0)$ i $(-2, -4, 1)$ jest osią symetrii

4. Opisz (i naszkicuj) obszar będący dziedziną funkcji dwóch zmiennych

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2/9 - y^2/16}$ b) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

c) $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ d) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ e) $f(x, y) = \ln(xy)$

f) $f(x, y) = \arcsin \frac{x^2+y^2}{4}$ g) $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$ h) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x+2}$ j) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y}$

k) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ l) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ m) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$

5. Niech $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Niektóre z poniższych napisów nie mają sensu - które?

$f(g(x, y), y)$, $f(g(x, y), g(x, y))$, $f(g(x), g(y))$, $g(f(g(x, y), x), x)$, $g(f(x+1, y) + x)$.

6. Narysuj poziomice (i/lub inne cięcia) wykresu funkcji tak, by odkryć jego kształt.

a) $z = x^2 + y^2$ c) $z = x^2 + y^2 + 2xy$ e) $f(x, y) = xy$ f) $f(x, y) = x^2 - y^2$

g) $f(x, y) = x + y$ h) $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ i) $f(x, y) = |x| + |2y|$

j) $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2}$ k) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ l) $f(x, y) = 2x + [y]$

m) $f(x, y) = y^2 - |x|$ n) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ o) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$

p) $f(x, y) = \sin x + \sin y$ r) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ s) $f(x, y) = 2y - \cos x$

t) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ u) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ v) $f(x, y) = [x] \cdot [y]$

7. Dobierz odpowiednią funkcję (i jej dziedzinę) tak, by jej wykres wyglądał jak:

- a) dach (dwuspadzisty) b) dach hali fabrycznej c) dach hangaru
d) pół pow. piłki do rugby e) wigwam f) namiot igloo g) wulkan

* * *

∂ 1. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego

a) $z = xy^2 - yx^2$ b) $z = \ln(x - y)$ c) $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$ d) $z = e^{xy}$

e) $f(x, y) = x \sin^2 y$ f) $g(x, y) = y \sin^2 x$ g) $z = y^2 + \sin(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

∂ 2. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

a) $f(x, y) = \frac{x^{10}y^{20}}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$ b) $f(x, y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$, $f(0, y) = y$

c) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0, 0) = 0$ d) $f(x, y) = x^7y^9 + xe^{xy}$ e) $z = |x| + [y]$

f) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$ g) $z = x^{y^x}$ h) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$

i) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, $f(0, y) = y$ j) $f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{xy - \frac{\pi}{2}}$, $f(x, \frac{\pi}{2x}) = -1$

∂ 3. Oblicz gradient funkcji a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $f(x, y) = x^2 + 3 \sin y$

c) $f(x, y) = 1 - x^2 - 4y^2$ d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e) $f(x, y) = x + 2y + 3$

f) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ g) $f(x, y, z) = xy^2z^3$ h) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^z$

* * *