ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 4.

1. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego

a) $z = xy^2 - yx^2$ **b)** $z = \ln(x-y)$ **c)** $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$ **d)** $z = e^{xy}$

e) $f(x,y) = x\sin^2 y$ **f)** $g(x,y) = y\sin^2 x$ **g)** $z = y^2 + \sin(x + \sqrt{x^2+y^2})$

2. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

a) $f(x,y) = \frac{x^{10}y^{20}}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ **b)** $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$, $f(0,y) = y$

c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0) = 0$ **d)** $f(x,y) = x^7y^9 + xe^{xy}$ **e)** $z = |x| + [y]$

f) $f(x,y) = \sin(x^2+y^3)$ **g)** $z = x^{y^x}$ **h)** $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$

i) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, $f(0,y) = y$ **j)** $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{xy-\frac{\pi}{2}}$, $f(x,\frac{\pi}{2x}) = -1$

3. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x,y) = x^2+y^2$ **b)** $f(x,y) = x^2 + 3\sin y$

c) $f(x,y) = 1 - x^2 - 4y^2$ **d)** $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **e)** $f(x,y) = x + 2y + 3$

f) $f(x,y,z) = x+2y+3z$ **g)** $f(x,y,z) = xy^2z^3$ **h)** $f(x,y,z) = (x^2+y^2)^z$

4. Oblicz pochodną funkcji w kierunku podanego wektora

a) $f(x,y) = x^8y^4 + e^{x^2y}$ w punkcie $(0,5)$ wzdłuż wektora $[-1,2]$

b) $f(x,y) = \sin^2(x^2y^2)$ w punkcie $(\pi, \frac{1}{\pi})$ wzdłuż wektora $[3,7]$

c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ w punkcie $(1,1)$ w kierunku wektora $[5,12]$

d) $f(x,y) = 2xy + x^2y^2$, $[1,-1]$ **e)** $f(x,y) = x(x+y)^{20}$, $[5,12]$

f) $f(x,y) = x^{y+1}$ w punkcie $(2,2)$ wzdłuż wektora $(1,1)$

g) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ w punkcie $(1,2)$ w kierunku wektora $(3,-4)$

h) $f(x,y) = \sin x + y^2x$, $(1,1)$ **i)** $f(x,y) = e^{xy} + x^8$, $(3,-4)$

5. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z = (2+x-y)^2$, $(3,-1,36)$ **b)** $z = 4x^2+y^2$, $(2,1,17)$

c) $zy + z = x + 2$, $(2,3,1)$ **d)** $xyz = 1$, $(0.5,-2,-1)$

e) $\sin(xy) = 2 - z^2$, $(\pi, 0.5, -1)$

6. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2+y^2+z^2 = 16$ i $z^2 = x^2+y^2$ w punkcie $(2,2,2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

7. Znajdź długość odcinka prostej $x = 2, y = 3$ zawartego między powierzchnią $z = x^2+y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1,1,2)$.

8. Oblicz wszystkie pochodne rzędu pierwszego 'jakie się da':

a) $z = 2x^2 - 3y^3$; $x = \sqrt{t}$, $y = e^{2t}$ **a')** $z = \operatorname{arctg}(y^2-x^2)$; $x = \sin t$, $y = \cos t$

b) $z = 2e^{x^2y}$; $x = \sqrt{uv}$, $y = 1/u$ **b')** $z = \ln(x^2-y^2)$; $x = u-v$, $y = u^2+v^2$

c) $z = \sin 2u\cos 3v$; $u = (r+s)^2$, $v = (r-s)^2$ **c')** $z = u^v$; $u = x^y$, $v = xy$

d) $z = ue^v + ve^{-u}$; $u = \ln r$, $v = s\ln r$

e) $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = 2t$

f) $w = \dfrac{yz}{x^2+xy}$; $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 - v^2$

g) $w = y\ln xz$; $x = ve^u$, $y = u^2v^4$, $z = ue^v$

h) $x^3 + 4x^2y + 2y^3 + 5 = 3xy^2$ **h')** $x^2 + y^2 + \sin(xy^2) = 3$

i) $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 3$ **i')** $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{1}{2}$

9. Udowodnij: **a)** jeśli $z = f(x-y)$, to $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

b) jeśli $w = f(x-y, y-z, z-x)$, to $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = ?$

c) jeśli $z = \dfrac{y}{y^2 - a^2\cdot x^2}$, to $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

10. Znajdź 3 początkowe wyrazy szeregu Taylora funkcji w otoczeniu punktu (0,0)

a) $f(x,y) = e^x\sin y$ **b)** $z = e^x\ln(1+y)$ **c)** $z = e^{xy}$ **d)** $z = x^2e^{x^2y^3}$

e) $f(x,y) = \sin(xy^2)$ **f)** $z = \cos(x^2+y^2)$ **g)** $z = xy$ **h)** $z = e^x$

11. Podaj przybliżoną wartość (wykorzystując pł. styczną) i oszacuj błąd.

a) $\sqrt{6{,}02^2 + 8{,}01^2}$ **a')** $\sqrt{6{,}01^2 + 8{,}02^2}$ **b)** $\dfrac{8{,}04}{2{,}02}$ **b')** $\frac{2{,}02}{8{,}04}$ **c)** $1{,}02^{3{,}01}$ **c')** $1{,}01^{3{,}02}$

d) $\dfrac{2{,}01\cdot 1{,}03}{2{,}01^2 - 1{,}03^2}$ **d')** $\dfrac{2{,}03\cdot 1{,}01}{2{,}03^2 - 1{,}01^2}$ **d")** $\dfrac{2{,}001\cdot 1{,}03}{2{,}001^2 - 1{,}03^2}$

12. Z jaką dokładnością należy zmierzyć długość i szerokość prostokątnej taśmy o przybliżonych wymiarach 120m $\times$ 3cm, by pole obliczyć z dokładnością do 1 mm^2?

13. Bok trójkąta długości 2,4 m rośnie z prędkością 10cm/s, drugi długości 1,5m maleje w tempie 5cm/s; kąt zawarty między tymi bokami mający 60^o rośnie w tempie 2^o na sekundę (stopnie!). Czy pole trójkąta rośnie, czy maleje? Z jaką prędkością?

14. Boki trójkąta 3m$\times$4m$\times$5m rosną w tempie 1cm/s. W jakim tempie rośnie pole?