Analiza matematyczna A3. Lista 6.

1. Sprawdzić czy podane równanie określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w pewnych otoczeniach podanych punktów.

a) $x^y - y^x = 0, \quad A = (2,4);\ B = (e,e);\ C = (3,3)$

b) $x^4 + y^4 = 2x^2y^2, \quad A = (0,0);\ B = (1,1);\ C = (-1,1)$

c) $x^2 + y^2 - 2xy = 0, \quad A = (0,0);\ B = (1,1);\ C = (-1,-1);\ D = (-1,1)$

d) $x^4 + y^4 - 2xy = 0, \quad A = (0,0);\ B = (1,1);\ C = (-1,-1)$

1'. Sprawdzić czy podane równanie określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną $z = z(x,y)$ w pewnych otoczeniach podanych punktów.

a) $x^2z + yz^2 - 2 = 0, \quad A = (1,1,1),\ B = (\sqrt{2},0,1)$

2. Wyznacz równania stycznych do krzywych w podanych punktach

a) $x^3 - y^3 + x - y = 0, \quad A = (2,2);\ B = (p,p)$

b) $x^2 + y^2 = 3xy - x, \quad A = (1,1);\ B = (0,0)$

c) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = -1, \quad A = (1,2),\ B = (0,1)$

2'. Wyznacz równania płaszczyzn stycznych do powierzchni w podanych punktach

a) $x^2 + y^3 + z^4 = x + z, \quad A = (0,0,0);\ B = (1,0,0);\ C = (1,0,1)$

3. Oblicz pochodną dy/dx i drugą pochodną d^2y/dx^2 funkcji uwikłanych $y = y(x)$

a) $xe^y - y + 1 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 - 3xy = 0$

b) $1 + xy = \ln\,(e^{xy} + e^{-xy})$ **c)** $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

3'. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji uwikłanej $z = z(x,y)$

a) $\cos(x+y+z) + x + y + z = 0$ **b)** $z^2 = xy$ **c)** $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

4. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej zadanej równaniem:

a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ **b)** $(x-y)^2 = y + xy - 3x$

c) $x^5 + y^4 - 4xy^2 = 0$ **d)** $x^3 + y^3 = 12xy$

4'. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej dwóch zmiennych zadanej równaniem:

a) $x^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

* * *

Rozgrzewka

0. (bezrachunkowe) Naszkicuj poszczególne zbiory zadane równaniami:

a) $|y| - x^2 = 0$ **b)** $|y| - |x^2 - 1| = 0$ **c)** $|y| - |x^3| = 0$ **d*)** $y^6 + x^2 = 0$

e) $\big(x^2 + (y+1)^2 - 2\big) \cdot \big(x^2 + (y-1)^2 - 2\big) = 0$ **f)** $y - x - [y - x] = 0$

g) $\big\{(x,y) : (x-i)^2 + (y-j)^2 - 1 = 0 \ \wedge\ i,j \in \{-1,1\}\ \big\}$

h) $|y| - \sin^2 x = 0$ **i)** $|y| - |\sin x| = 0$ **j)** $(y - \sin(x-\pi) - 2)\cdot(y - \sin x) = 0$

- Wyznacz możliwie najmniejszą liczbę funkcji ciągłych (zmiennej x), których suma wykresów jest danym zbiorem. Dla każdej z powyższych funkcji wskaż punkty szczególne: bez pochodnej, z pochodną =0, ekstrema,
- Jak wyżej, ale funkcje zmiennej y, t.j. postaci $x = x(y)$.
- Czy powyższe można zrobić na wiele sposobów? Na ile? Które punkty są osobliwe?

0'. Pomyśl o zbiorach w przestrzeni zadanych równaniami:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ **b)** $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ **c)** $|z| - (x^2 + y^2) = 0$

d) $|z| - (x^2 + y^2 - 1) = 0$ **e)** $x^2 + 3y^4 + 5z^6 - 1 = 0$ **f)** $\sin^2|z| = x^2 + y^2$

Każdy z nich przedstaw jako sumę wykresów pewnych funkcji postaci $z = z(x,y)$. Przeanalizuj własności tych funkcji jak w zad. 0.

* * *

Takiego zadania jeszcze nie było

Ź. Które z poniższych zadań nie pasuje do pozostałych? (Nie rozwiązuj ich!)

a) Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = e^{2x+y} - 1$ gdy $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

b) Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 - 1$ gdy $e^{2x+y} = 1$.

c) Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = e^{2\cos x + \sin x + 5}$.

d) Znajdź kres górny i dolny zbioru $\{e^{2x+y} - 1 : x^2 + y^2 + 9 = 2x + 6y, x, y \in \mathbb{R}\}$.

e) Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x,y) = e^{2x+y} - 1$, której dziedziną jest zbiór $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0\}$.

f) Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = e^{2x+\sqrt{2x-x^2}+3} - 1$ i $g(x) = e^{2x-\sqrt{2x-x^2}+3} - 1$.

g) Wyznacz takie wartości parametru m, że prosta $y = -2x + m$ jest styczna do okręgu $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

* * *