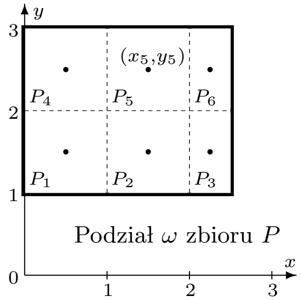
Analiza matematyczna A3. Lista 7. $\iiint$

Wypełniańka. Podział ω prostokąta $P = [0, \frac{5}{2}] \times [..., ...]$ tworzy 6 zbiorów:
$P_1 = [0,1] \times [1,2]$, $P_2 = ... \times ...$, $P_3 = ...$, ...
o polach: $\Delta p_1 = 1$, $\Delta p_2 = ...$, $\Delta p_3 = ...$, ...
Wybrano w nich punkty: $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, \frac{...}{2})$, ...



Dla funkcji $f(x,y) = x+y$ i podziału z punktami, liczymy

$\sigma_\omega := \sum_{i=1}^{...} f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i := (\frac{1}{2} + \frac{...}{2}) \cdot 1 +$ .... $= ...$

$s_\omega := \sum_{i=1}^{...} \inf_{z \in P_i} f(z) \cdot \Delta p_i = (0+1) \cdot 1 +$ .... $= ...$

$S_\omega := \sum_{i=1}^{...} \sup_{z \in P_i} f(z) \cdot \Delta p_i = (1+2) \cdot 1 +$ .... $= ...$

1. Powtórz dla: **a)** $f(x,y) = [x]+[y]$ **b)** $f(x,y) = [x+y]$ **c)** $f(x,y) = [x]$

d) $f(x,y) = [y-x]$ **e)** $f(x,y) = x + \mathrm{sgn}\,(y-x)$ (gdzie $[.]$ – część całkowita)

2. Niech $m, n \in \mathbb{N}$.
Prowadząc (odpowiednie) proste równoległe do osi układu, można zbiór P podzielić na $m \cdot n$ jednakowych prostokątów P_i, $i = 1, 2, \ldots mn$, o polach $\Delta p_i = ...$.
Niech jak poprzednio (x_i, y_i) będzie środkiem prostokąta P_i.

a) Przyjmując $m = 25$ i $n = 20$ oraz $f(x,y) = [x]$ oblicz wielkości:

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^{m \cdot n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^{m \cdot n} \inf_{z \in P_i} f(z) \cdot \Delta p_i, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^{m \cdot n} \sup_{z \in P_i} f(z) \cdot \Delta p_i.$$

a') przyjmując $m = 2{,}5 \cdot 10^k$ i $n = 2{,}0 \cdot 10^k$ oblicz wielkości σ_ω, s_ω, S_ω

a") oblicz granice ciągów σ_ω, s_ω, S_ω gdy $k \to \infty$

b) powtórz a)–a") dla $f(x,y) = [x]+[y]$ **c)** powtórz a)–a") dla $f(x,y) = x+y$

3. Odgadnij $\iint_P f\, d\omega$ i dobierz taki 'wygodny' podział ω, że $|S_\omega - s_\omega| < \frac{1}{10^6}$, gdzie:

a) $f(x,y) = [2x] + [y]$, $P = [0, \frac{1}{3}]^2$ **a')** $P = [0, \frac{1}{2}]^2$ **a")** $P = [0,4]^2$

b) $f(x,y) = |x|$, $P = [-1,1]^2$ **b')** $P = [-1,3] \times [-\pi, \sqrt{2}]$

c) $f(x,y) = [x - \sqrt{2}] + [y]$, $P = [\sqrt{2}, 5 + \sqrt{2}] \times [2,7]$ **c')** $P = [2,4]^2$

d) $f(x,y) = [\frac{x}{\pi}] + [\frac{y}{\pi}]$, $P = [1,4] \times [2,8]$ **e)** $f(x,y) = [\frac{x}{\pi} + \frac{y}{\pi}]$, $P = [1,4] \times [2,8]$

4. Proste $y = \pm x + n/3$, $n \in \mathbb{Z}$, wyznaczają podział ω trójkąta P o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, w którym jest ... kwadratów o polach ... oraz ... trójkątów o polach ... . Dla funkcji $f(x,y) = (x+y)^2$ obliczyć wielkości s_ω i S_ω.

5. Które całki można obliczyć bez rachunku całkowego? **a)** $\iint_{[0,1]^2} 2x + 3y\, d\omega$

b) $\iint_{[0,1]^2} e^{[x+y]}\, d\omega$ **c)** $\iint_{[-1,1]^2} e^{[x+y]}\, d\omega$ **d)** $\iint_{[0,1]^2} x^2 y^3\, d\omega$ **e)** $\iint_{[-1,1]^2} x^2 y^3\, d\omega$

f) $\iint_{x^2+y^2 \le 1} x^2 y^3\, d\omega$ **g)** $\iint_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{x^2+y^2}\, d\omega$ **h)** $\iint_{[-1,1]^2} |x+y|\, d\omega$

Poniższych zadań nie będzie (na najbliższej kartkówce), ale będą podobne.

1. Niech $P = [2,4] \times [1,2]$ i niech $f(x,y) = [x]$.
Podaj sumę dolną s_ω i sumę górną S_ω funkcji f na zbiorze P dla podziału ω, gdzie

a) ω oznacza podział P prostymi postaci $x = \frac{k}{1000}$, (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

$s_\omega =$ $S_\omega =$

b) ω oznacza podział P prostymi postaci $y = \frac{k}{1000}$, (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

$s_\omega =$ $S_\omega =$

c) ω oznacza podział P na $2 \cdot 10^6$ jednakowych kwadratów.

$s_\omega =$ $S_\omega =$

2. Niech P oznacza czworokąt o wierzchołkach: (0,0), (1,0), (2,1), (1,1) i niech $f(x,y) = 3(x-y)$. Niech dla ustalonej liczby naturalnej n ω_n oznacza podział P prostymi postaci $y = \frac{k}{n}$ i $y = x - \frac{k}{n}$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$). Oblicz sumę dolną s_{ω_n} i sumę górną S_{ω_n} funkcji f na zbiorze P i oblicz granice $\lim\limits_{n \to +\infty} s_{\omega_n}$ oraz $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{\omega_n}$.

3. Podaj wartości całek

a) $\iint_{[-3,3]^2} |y - x|\, d\omega =$

b) $\iint_{[-3,3]^2} y - x\, d\omega =$

c) $\iint_{[-3,3]^2} y^4 - x^4\, d\omega =$

d) $\iint_{[-1,1]^2} [y] + [x]\, d\omega =$

e) $\iint_{[0,1]^2} 3y\, d\omega =$

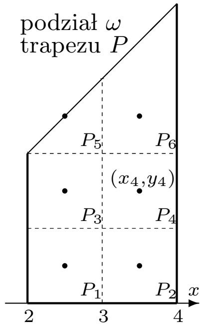
ANALIZA MATEMATYCZNA A3, NOTATKI: $\iint\limits_P f$

PRZYKŁAD. $\iint\limits_P f$ gdzie $f(x,y)=[x-y]$ i P – trapez $(2,0),(4,0),(4,4),(2,2)$.

Zbiór $P=[2,4]\times[0,4]\cap\{(x,y): y\le x\}$ można podzielić na skończenie wiele zbiorów o rozłącznych wnętrzach (na wiele sposobów).
Rozważmy podział $\omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$ gdzie

$P_1=[2,3]\times[0,1]$, $P_2=[...,4]\times[...,...]$,
$P_3=[2,3]\times[...,...]$, $P_4=[...,...]\times[1,2]$,
$P_5=[2,3]\times[2,3]\cap P$, $P_6=[3,4]\times[2,4]\cap P$.

Pola tych zbiorów są równe: $\Delta p_1=\Delta p_2=\Delta p_3=\Delta p_4=1$, $\Delta p_5=0.5, \Delta p_6=....$ Oczywiście pole $P=\sum_i \Delta p_i$.
W każdym zbiorze P_i wybierzmy po (jednym) punkcie (x_i,y_i); np. $(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{5}{2})$.



podział ω trapezu P

Dla funkcji $f(x,y)=[x-y]$, podziału ω z wybranymi punktami (x_i,y_i), obliczamy:

$$\sigma_\omega := \sum_{i=1}^{6} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i = $$
$$= [\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}]\cdot 1+[\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2}]\cdot 1+[\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}]\cdot 1+[\tfrac{7}{2}-\tfrac{3}{2}]\cdot 1+[\tfrac{5}{2}-\tfrac{5}{2}]\cdot\tfrac{1}{2}+[\tfrac{7}{2}-\tfrac{5}{2}]\cdot\tfrac{3}{2}=9\tfrac{1}{2}.$$

Przy innym wyborze punktów (np. zmieniając tylko $(x_2,y_2)=(4,0)$) możemy dostać inną liczbę (w tym przypadku $10\frac{1}{2}$) ale zawsze między liczbami s_ω i S_ω gdzie:

$$s_\omega := \sum_{i=1}^{...}\Big(\inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\Big) = 1\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot\tfrac{1}{2}+0\cdot\tfrac{3}{2} = \ ...\ ,$$

$$S_\omega := \sum_{i=1}^{6}\Big(\sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\Big) = 3\cdot 1+4\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{3}{2} = 15\tfrac{1}{2}\ .$$

Dla tej funkcji i zbioru P można rozważać 'wygodniejsze' podziały: mianowicie dla **ustalonej** liczby naturalnej n proste o równaniach postaci $y=x+\frac{k}{n}$, $x=\frac{k}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$, dzielą P na równoległoboki i trójkąty (na rys. $n=5$) wyznaczając podział ω'_n. Gdy wszystkie punkty (x_i,y_i) są wybrane z **wnętrz** P_i, to łatwo zliczamy (wskazówka: zsumuj pola takich P_i, że $f(x_i,y_i)=2$):

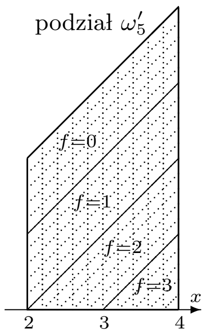
$$\sigma_{\omega'_n}=\sum_i f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i = 3\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{3}{2}+1\cdot 2+0\cdot 2 = 6\tfrac{1}{2}$$

Podobnie $\quad s_{\omega'_n}=\sum\limits_i \inf\limits_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i = 6\frac{1}{2}$.

Zaznacz te P_i, na których f nie jest stała. Widać wtedy, że

$$S_{\omega'_n}=\sum_i \sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i =$$
$$=6\tfrac{1}{2}+1\cdot\tfrac{2}{n}+1\cdot\tfrac{2}{n}+1\cdot(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{2n^2})+1\cdot\tfrac{1}{2n^2}=6\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{n}+\tfrac{1}{n^2}.$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $\sigma_{\omega'_n}, s_{\omega'_n}, S_{\omega'_n}$ są niemal $6\frac{1}{2}=\iint\limits_P f$.



PRZYKŁAD. Dla $f(x,y)=y/x$ podziały ω''_n trapezu P prostymi: $y=\frac{k}{n}x$, $x=\frac{k}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$ dają: $s_{\omega''_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\cdot\frac{6}{n}=3\cdot\frac{n-1}{n}$, $S_{\omega''_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{6}{n}=3\cdot\frac{n+1}{n}$, więc $\iint\limits_P \frac{y}{x}=3$.

UWAGA. Dla innych funkcji 'wygodne' są inne podziały P; np. dla $f(x,y)=(2x-y)^3$ – podział prostymi: $y=2x+\frac{k}{n}$, $x=\frac{k}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$. Dla $f(x,y)=2x+y^3$ trudno o 'wygodny' podział; później zobaczymy jak rachunek całkowy 'załatwia' ten problem.

PRZYKŁAD. $\iint\limits_P f$ gdzie $f(x,y)=x^2+y^2$ i P – koło o środku $(0,0)$ i promieniu R.

Dla ustalonego n dzielimy koło na n^2 części: dla $i=j+(k-1)n$, $1\le j,k\le n$, niech

$$P_i=P_{j+(k-1)n}=\{(r\cos t, r\sin t): R\sqrt{\tfrac{k-1}{n}}\le r\le R\sqrt{\tfrac{k}{n}}\ \wedge\ 2\pi\tfrac{k-1}{n}\le t\le 2\pi\tfrac{k}{n}\}$$

(zrób rysunek). Mamy $\Delta p_i=\Delta p_{j+(k-1)n}=\frac{1}{n}(\pi R^2\sqrt{\frac{k}{n}}^2-\pi R^2\sqrt{\frac{k-1}{n}}^2)=\frac{1}{n^2}\pi R^2$.
Ponieważ na każdej z części k-tego pierścienia f 'zachowuje się jednakowo', więc

$$s_{\omega_n}=\sum_{k=1}^{n} R^2\tfrac{k-1}{n}\cdot n\tfrac{\pi R^2}{n^2}=\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{1}{2}\pi R^4\ ,\qquad S_{\omega_n}=\sum_{k=1}^{n} R^2\tfrac{k}{n}\cdot n\tfrac{\pi R^2}{n^2}=\tfrac{n+1}{n}\cdot\tfrac{1}{2}\pi R^4\ .$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $s_{\omega_n}, S_{\omega_n}$ są niemal równe $\frac{1}{2}\pi R^4=\iint\limits_{||(x,y)||\le R} x^2+y^2$.

DEFINICJA. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze domkniętym ograniczonym P. Dla podziału $\omega=\{P_1,\dots P_m\}$ na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega=\sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i,\ s_\omega=\sum_{i=1}^{m}\inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i,\ S_\omega=\sum_{i=1}^{m}\sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i,$$

gdzie $\Delta p_1=$ pole zbioru P_i. Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$\underline{\iint\limits_P} f := \sup\limits_\omega s_\omega$ – całka dolna, $\overline{\iint\limits_P} f := \inf\limits_\omega S_\omega$ – całka górna.

Gdy są równe, to tę liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\iint\limits_P f$.

Oczywiście dla dowolnego podziału ω mamy: $\quad s_\omega\ \le\ \underline{\iint\limits_P} f\ \le\ \overline{\iint\limits_P} f\ \le\ S_\omega$.

PRZYKŁAD. Są funkcje, dla których całka nie istnieje, np. dla funkcji $f(x,y)=0$ gdy $x\in\mathbb{Q}$ i $f(x,y)=1$ gdy $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dla zbioru $P=[1,3]\times[1,3]$ i dowolnego podziału ω jest: $s_\omega=\sum\limits_{i=1}^{m}0\cdot\Delta p_i=0$, $S_\omega=\sum\limits_{i=1}^{m}1\cdot\Delta p_i=4$, więc $\underline{\iint\limits_P} f=0\ne 4=\overline{\iint\limits_P} f$.

TW. Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na P, to jest całkowalna na P, tzn. $\underline{\iint\limits_P} f=\overline{\iint\limits_P} f$, całka dolna i górna są równe. Ponadto, jeśli ω_n jest ciągiem podziałów P takim, że średnice największych zbiorów są zbieżne do 0, to $\lim\limits_{n\to\infty} s_{\omega_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\omega_n}=\lim\limits_{n\to\infty} S_{\omega_n}=\iint\limits_P f$.

TWIERDZENIE.(o zamianie całki podwójnej na iterowaną)
Niech $P=\{(x,y):\varphi(x)\le y\le\psi(x),\ x\in[a,b]\}$, gdzie $\varphi(x),\psi(x)$ są f-cjami ciągłymi takimi, że $\varphi(x)\le\psi(x)$ dla $x\in[a,b]$. Wtedy dla funkcji $f(x,y)$ całkowalnej na zbiorze P mamy

$$\iint\limits_P f(x,y)=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx\ .$$