Analiza matematyczna A3. Lista 7 – rozwiązania niektórych zadań

**1.** Niech $P = [2,4]\times[1,2]$ i niech $f(x,y) = [x]$. Podaj sumę dolną $s_\omega$ i sumę górną $S_\omega$ funkcji $f$ na zbiorze $P$ dla podziału $\omega$, gdzie

**a)** $\omega$ oznacza podział $P$ prostymi postaci $x = \frac{k}{1000}$, (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

$s_\omega = 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 = 5$ $\qquad$ $S_\omega = s_\omega + 1\cdot\frac{1}{1000}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{1000}\cdot 1 = 5 + \frac{2}{1000}$

**b)** $\omega$ oznacza podział $P$ prostymi postaci $y = \frac{k}{1000}$, (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)

$s_\omega = 2\cdot 2\cdot 1 = 4$ $\qquad$ $S_\omega = 4\cdot 2\cdot 1 = 8$

**c)** $\omega$ oznacza podział $P$ na $2\cdot 10^6$ jednakowych kwadratów.

$s_\omega =$ jak w a) $\qquad$ $S_\omega =$ jak w a)

**2.** Niech $P$ oznacza czworokąt o wierzchołkach: (0,0), (1,0), (2,1), (1,1) i niech $f(x,y) = 3(x-y)$. Niech dla ustalonej liczby naturalnej $n$ $\omega_n$ oznacza podział $P$ prostymi postaci $y = \frac{k}{n}$ i $y = x - \frac{k}{n}$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$). Oblicz sumę dolną $s_{\omega_n}$ i sumę górną $S_{\omega_n}$ funkcji $f$ na zbiorze $P$ i oblicz granice $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{\omega_n}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{\omega_n}$ .

$$s_{\omega_n} \underset{\text{dlaczego?}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} 3\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot 1 = 3\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = 3\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

$$S_{\omega_n} \underset{\text{dlaczego?}}{=} \sum_{k=1}^{n} 3\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot 1 = 3\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = 3\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

**3.** Podaj wartości całek

**a)** $\displaystyle\iint\limits_{[-3,3]^2} |y-x|\, d\omega = |\text{ dwa ostrosłupy }| = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6)\cdot 6 = 72$

**b)** $\displaystyle\iint\limits_{[-3,3]^2} y - x\, d\omega = 0$, bo dwa ostrosłupy, jeden nad, drugi pod pł. $z = 0$

**c)** $\displaystyle\iint\limits_{[-3,3]^2} y^4 - x^4\, d\omega = \iint\limits_{[-3,3]^2} y^4\, d\omega - \iint\limits_{[-3,3]^2} x^4\, d\omega = \iint\limits_{[-3,3]^2} x^4\, d\omega - \iint\limits_{[-3,3]^2} x^4\, d\omega = 0$

**d)** $\displaystyle\iint\limits_{[-1,1]^2} [y]+[x]\, d\omega = (\text{na palcach}) = 0\cdot 1^2 + (-1)\cdot 1^2 + (-1)\cdot 1^2 + (-2)\cdot 1^2 = -4$

**e)** $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]^2} 3y\, d\omega = (\text{pół prostopadłościanu}) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3 = \frac{3}{2}$