Analiza matematyczna A3. Lista 8. $\iint$, $\iiint$

1. Oblicz całki wielokrotne jak w przykładzie:

$$\int_0^6\int_0^1 xy+ye^x\,dxdy = \int_0^6\left(\int_0^1 xy+ye^x dx\right)\,dy = \int_0^6\left[\frac{1}{2}x^2y+ye^x\right]_0^1\,dy =$$
$$= \int_0^6 y\left(e-\frac{1}{2}\right)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2\left(e-\frac{1}{2}\right)\right]_0^6 = 18\left(e-\frac{1}{2}\right) = 18e-9$$

a) $\int_2^4\int_3^7 y\ln x\,dxdy$ **b)** $\int_4^6\int_1^2\int_2^3 x+2y+3z\,dxdydz$ **c)** $\int_0^1\int_1^2\int_2^3 xy+z\,dxdydz$

d) $\int_0^{2\pi}\int_1^e (\sin y)x^{1/x}\,dxdy$ **e)** $\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{x+y}\,dxdy$ **f)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin^2(xy)\,dxdy$

2. Dokonaj zmiany kolejności całkowania. Oblicz obydwie całki i porównaj wyniki

a) $\int_2^3\int_0^{\sqrt{y}} x^3\,dxdy$ **b)** $\int_1^2\int_1^y xy\,dxdy$ **c)** $\int_{-1}^1\int_{|y|-1}^{1-|y|} x+y^2\,dxdy$ **d)** $\int_1^2\int_{2-x}^{x^2} 1\,dydx$

e) $\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x+y\,dydx$ **f)** $\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} y+2\,dydx$ **g)** $\int_0^2\int_0^{4-x^2} 3x\,dydx$

3. Oblicz całki (uwaga: trapez, trókąt oznacza pełny wielokąt)

a) $\iint_K e^x\,d\omega$, K - (pełny) trapez o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ i $(3,0)$

b) $\iint_L xy\,d\omega$, L - trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$ i $(2,-1)$

c) $\iint_M x^3\,d\omega$, $M=\{(x,y);4x^2+y^2\le 4\}$ **h)** $\iint_R |x^2-y|\,d\omega$, $R=[0,1]\times[0,1]$

d) $\iiint_N x^2+y\,d\omega$, $N=\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{R}_+\cup\{0\},x+y+z\le 1\}$

e) $\iiint_O 1\,d\omega$, $O=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\le 1,x\ge 0\}$

f) $\iint_P x^2\,d\omega$, P - czworokąt krzywoliniowy o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,4)$, $(8,1)$ i $(-2,-2)$ ograniczony krzywymi: $y=x^2$ i $xy=8$ i dwoma odcinkami

g) $\iint_Q \sqrt{y}\,d\omega$, Q - obszar ograniczony parabolą $y=x^2$ i prostą $y=x+6$

h) $\iint_R |x^2-y|\,d\omega$, $R=[0,1]\times[0,1]$

4. Znajdź środki ciężkości figur K,L,N,O,P,Q i $S=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,x+y\le 1\}$

Poniższe prostsze ćwiczenia (miejscami żmudne) są analogiczne do zadań 1-3.

Ć1. **a)** $\int_0^1\int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}\,dx\,dy$ **b)** $\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$ **c)** $\int_0^1\int_1^5 \frac{1}{r}\,dr\,ds$

d) $\int_{-1}^1\int_0^2 x^{15}e^{x^2y^2}\,dy\,dx$ **e)** $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy$ **f)** $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)}\int_0^{e^y} \cos e^y\,dx\,dy$

g) $\int_{-1}^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y} z-2x-y\,dz\,dy\,dx$ **h)** $\int_{-13}^{13}\int_1^e\int_0^{x^{-0,5}} z(\ln x)^2\,dz\,dx\,dy$

Ć2. **a)** $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ **b)** $\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3}-x)\,dx\,dy$ **c)** $\int_1^e\int_0^{\ln x} y\,dy\,dx$

d) $\int_0^{\pi^{1/3}}\int_{y^2}^{\pi^{1/3}} \sin x^{3/2}\,dx\,dy$ **e)** $\int_1^e\int_{1/e}^{1/y} \cos(x-\ln x)\,dx\,dy$ **f)** $\int_0^x\int_x^y y\,dx\,dy$

g) $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} x^2+yz\,dz\,dy\,dx$ **h)** $\int_0^1\int_0^2\int_0^{3-3x} x^2+yz\,dz\,dy\,dx$

Ć3. **a)** $\iint_A 3x-5\,d\omega$, gdzie A jest ogr. liniami: $y=5+x,\ y+x=7,\ x=10$

b) $\iint_B xy\,d\omega$, gdzie B jest ogr. liniami: $y=x,\ y=x^2$

c) $\iint_C 4+x^2\,d\omega$, gdzie C jest ogr. liniami: $y=1+x^2,\ y=9-x^2$

d) $\iiint_R xy\,d\omega$, gdzie R jest częścią kuli o środku (0,0,0) i promieniu 2 zawartą w I oktancie

e) $\iiint_W z\,d\omega$, gdzie W jest ogr. pow.: $x^2+y^2+z^2=9,\ z=0,\ |x|=1,\ |y|=1$

f) $\iiint_V 3xy\,d\omega$, gdzie V jest ogr. pow.: $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+z^2=1$

Problem Misia. Powszechnie wiadomo jak litrowym naczyniem w kształcie walca odmierzyć pół litra - wystarczy przechylić je tak, aby płyn zakrywał całe dno i jego poziom był styczny do obwodu dna. A ile płynu zostanie w naczyniu jeśli przechylimy je tak, aby płaszczyzna poziomu płynu przechodziła przez średnicę dna?