Analiza matematyczna A3. Lista 9.

1. Wyraź całki we współrzędnych biegunowych i oblicz je w nowych współrzędnych.

a) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dxdy$ **b)** $\int\limits_0^2 \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dydx$ **c)** $\int\limits_1^2 \int\limits_0^x \pi\,dydx$

d) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x\sqrt{3}} xy\,dydx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx$ **e)** $\int\limits_{-3}^{3/\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dydx$ **f)** $\iint\limits_{[0,3]^2} x\,d\omega$

g) $\int\limits_0^3 \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} |x+y|\,dydx$ **h)** $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2)\,dydx$ **i)** $\iint\limits_{x^2+y^2<2y} x^2+y^2 d\omega$

2. Obliczyć objętość obszaru (a-f: ograniczonego powierzchniami):

a) $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ **b)** $z=4,\ x^2+4y^2=z$

c) $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z^2$ **d)** $2z=x^2+y^2,\ x+z=4$

e) $z=4x+2y,\ x^2+y^2=1,\ z=0$ **f)** $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=z^2,\ z=0$

g) $\{(x,y,z): z^2+4\le x^2+y^2+z^2\le 9\}$ **h)** $\{(x,y,z): |x|+|y|+|z|\le 9\}$

3. Oblicz masę płytki w kształcie tr. równob. o boku 2, jeżeli gęstość jest proporcj. do kwadratu odległości od p-ktu przecięcia środkowych i w wierzch. jest równa 1.

3D. Oblicz masę piramidy o wysokości 3 i podstawie 2×2, jeżeli gęstość jest proporcj.
a) do kwadratu odległości od wierzchołka i przy podstawie jest równa 7
b) do sześcianu odległości od podstawy i w górnym wierzch. jest równa 1.
c) do czwartej potęgi odległości od środka podstawy i w wierzch. jest równa 1

4. Wyraź całki we współrzędnych cylindrycznych i oblicz je.

a) $\iiint\limits_D x^2+y^2\,dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=4$

b) $\iiint\limits_D z\,dV$ gdzie D jest wyznaczone przez $x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0$

c) $\iiint\limits_D y^2\,dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$

d) $\iiint\limits_D yz\,dV$ gdzie D wyznaczają pow. $x^2+y^2+z^2=1,\ r=\cos\theta,\ y=0,\ z=0$

5. Wyznacz pole powierzchni **a)** bryły $V=\{(x,y,z): 0\le z\le 9-x^2-y^2\}$
b) części paraboloidy $z=9-x^2-y^2$ leżącej nad płaszczyzną $z=5$
c) części sfery $16=x^2+y^2+z^2$ leżącej w cylindrze $x^2-4x+y^2=0$
d) części pow. $z=x^2$ leżącej nad trójkątem o wierzch. (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0).

6. Wyraź całki we współrzędnych sferycznych i oblicz je w nowych współrzędnych.

a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dzdydx}{x^2+y^2+z^2}$ **b)** $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2 dzdydx$

c) $\iiint\limits_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dV$, gdzie V jest wyznaczone przez:

$$z=\sqrt{3x^2+3y^2}\ ,\ x^2+y^2+z^2=9\ ,\ x^2+y^2+z^2=81\ ,\ z\ge 0$$

d) $\iiint\limits_V \sqrt{z}\,dV$, gdzie V wyznacz.: $x^2+y^2+z^2=16\ ,\ x=y,\ x=\sqrt{3}y\ ,\ x,y,z\ge 0$

* * *

7j. Oblicz jakobiany, znajdź przekształcenia odwrotne i obrazy podanych zbiorów:

a) $x=\frac{1}{2}(u+v),\ y=\frac{1}{2}(u-v);\quad W=\{(u,v): 1\le u\le 2,\ -u\le v\le 4-u\}$

b) $x=u,\ y=v\sqrt{u};\quad W=\{(u,v): 0\le u\le 1,\ 0\le v\le \sqrt{u}\}$

c) $x=2u+3v,\ y=u-v;\quad W=\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$

d) $x=u,\ y=v^2;\quad W_1=\{(u,v): 1\le u\le 2,\ 2\le v\le 3\},\quad W_2=[1,2]\times[3,4]$

8j. Wyraź całki w nowych podanych współrzędnych i oblicz je.

a) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy}\,dydx$ $\qquad\begin{cases} x=s\cdot\cos^4 t\\ y=s\cdot\sin^4 t\end{cases}$

b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (x+y)^{10} dydx$ $\begin{cases} x=s\cos^2 t\\ y=s\sin^2 t\end{cases}$ **c)** $\int\limits_2^3 \int\limits_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} |x+y|\,dydx$ $\begin{cases} x=x\\ r=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$

* * *

9. Dla jakich dodatnich wartości parametru m całka niewłaściwa jest zbieżna?

a) $\iint\limits_{||(x,y)||\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^m}$ **b)** $\iint\limits_{||(x,y)||\le 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^m}$

c) $\iiint\limits_{||(x,y,z)||\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^m}$ **d)** $\iiint\limits_{||(x,y,z)||\le 1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^m}$

10. Wyznacz wartość całki niewłaściwej $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-x^2}\,dx$.

Analiza matematyczna A3, Notatki biegunowe

Zadania dodatkowe (Całki w układzie biegunowym, sferycznym i cylindrycznym)

1. Zapisz całkę podwójną $\iint_S \; f(x,y)$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie biegunowym, gdy:

a) $S=\{(x,y): x^2+y^2\le\pi \wedge x,y<0\}$ **b)** $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4 \wedge x<|y|\}$

c) $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4x \;\wedge\; x<|y|\}$ **d)** $S=\{(x,y): 1<x^2+y^2\le 4x\}$

e) $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4x \;\wedge\; x>|y|\}$

f) $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4x \;\wedge\; x^2+y^2\le 4\}$

g) $S=\{(x,y): x^2+y^2\ge 4x \;\wedge\; x^2+y^2\le 4\}$

h) $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4 \wedge |x|<1\}$ **i)** $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4 \wedge |x|>1\}$

j) $S=\{(x,y): 1<x^2+y^2\le 9 \;\wedge\; |y|<2\}$

k) $S=\{(x,y): 1<x^2+y^2\le 9 \;\wedge\; |x|>2\}$

l) $S=\{(x,y): 4<x^2+y^2\le 9 \;\wedge\; |y|<2\}$

m) $S=\{(x,y): 4<x^2+y^2\le 9 \;\wedge\; |y|<1\}$

n) $S=\{(x,y): 1<x^2+y^2\le 4 \;\wedge\; x^2+y^2\le 2y\}$

o) $S=\{(x,y): 1<x^2+y^2\le 4 \;\wedge\; x^2+y^2\ge 2x\}$

p) $S=\{(x,y): 4<x^2+y^2\le 9 \;\wedge\; y<\sqrt{3}|x|\}$

q) $S=\{(x,y): 1<x^2+y^2\le 4 \;\wedge\; 1<x<2|y|\}$

2. Zapisz całkę potrójną $\iiint_W \; f(x,y,z)$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie sferycznym i cylindrycznym, gdy:

a) $W=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le\sqrt{17} \;\wedge\; x,y,z\le 0\}$

b) $W=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4 \;\wedge\; z^2<x^2+y^2 \;\wedge\; z<0\}$

c) $W=\{(x,y,z): 2x^2+2y^2\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$

d) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+: 2x^2+2y^2\le x^2+y^2+z^2\le 4 \;\wedge\; z^2<2x^2+2y^2\}$

e) $W=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4 \;\wedge\; |z|<1\}$

f) $W=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 4 \;\wedge\; z^2<12\}$

g) $W=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1 \;\wedge\; x^2+y^2+z^2\le 4\}$

h) $W=\{(x,y,z): x^2+y^2\ge 3 \;\wedge\; x^2+y^2+z^2\le 4\}$

3. Zapisz całkę potrójną $\iiint_U \; f(x,y,z)$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie sferycznym lub cylindrycznym (wybierz wygodniejszy), gdy:

a) $U=\{(x,y,z): 2x^2+2y^2\le z^2\le 3x^2+3y^2\le 27\}$

b) $U=\{(x,y,z): 2x^2+2y^2+2z^2\le 4z^2\le 3x^2+3y^2+3z^2\le 27\}$

c) $U=\{(x,y,z): 2x^2+2y^2\le z\le 3x^2+3y^2\le 27\}$

d) $U=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 2z\le 2x^2+2y^2\}$

e) $U=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4z\le 4x^2+4y^2\}$

f) $U=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4z\le 4x^2+4y^2<1\}$

h) $U=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4z \;\wedge\; x^2+y^2+z^2\le 4\}$

i) $U=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\ge 4z \;\wedge\; x^2+y^2+z^2\le 4\}$

j) $U=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4z \;\wedge\; x^2+y^2+z^2\ge 4\}$

4. Sprawdź (i narysuj)

$$\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{z}\left(\int_{\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy\right)dx+\int_z^{\sqrt{4-z^2}}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy\right)dx\right)dz=$$

$$=\int_0^{2}\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\;d\vartheta\right)d\varphi\right)dr=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^{2}\left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\;d\vartheta\right)dr\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_h^{\sqrt{4-h^2}}\left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h)\cdot r\;d\vartheta\right)dr\right)dh=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_h^{\sqrt{4-h^2}} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h)\cdot r\;dr\right)d\vartheta\right)dh=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{r} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h)r\;dh\right)dr+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, h)r\;dh\right)dr\right)d\vartheta$$