Analiza matematyczna A3. Lista fizyczna

0. Koralik powstaje z kulki o promieniu R po wywierceniu otworu wiertłem o średnicy d. Podaj (jakiś) opis analityczny tego koralika, znajdź objętość i pole pow.

1. Wyznacz środek ciężkości półkuli $x^2+y^2+z^2 \leq 6x,\ z \leq 0$ wypełnionej substancją, której gęstość g jest proporcjonalna do kwadratu odległości od osi symetrii tej półkuli i wynosi 3 na osi symetrii oraz 1 w punktach najbardziej odległych od tej osi.

1'. Ułóż zadanie analogiczne do 1. dla **a)** półkola **b)** odcinka.

2. Rozważmy stożek o promieniu podstawy $R = 1$ i wysokości $H = 2$ wypełniony pewną niejednorodną substancją. Jej gęstość ρ jest funkcją liniową odległości od podstawy i przy podstawie ma wartość 1, a przy wierzchołku — wartość 0. Oblicz masę substancji wypełniającej ten stożek.

2'. Ułóż zadanie analogiczne do 2. dla trójkąta **a)** na płaszczyźnie **b)** w $\mathbb{R}^3$

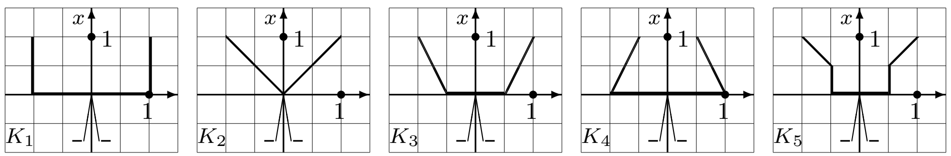
3. Kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ma gęstość g proporcjonalną do odległości od środka kuli i na brzegu kuli przyjmuje wartość $\frac{9}{8}$. Kula ta obraca się względem prostej przechodzącej przez punkty $(0, 0, 2)$, $(0, 2, 2)$ ze stałą prędkością kątową ω. Wyznacz energię kinetyczną tej kręcącej się kuli.

3'. Ułóż zadanie analogiczne do 3. dla **a)** koła **b)** odcinka.

* * *

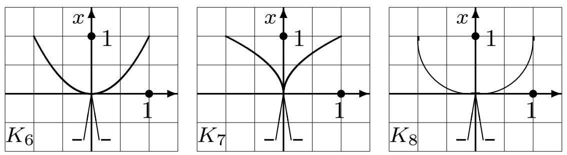
Problem połowy (*tylko dla dorosłych*)

Wincenty (który lubi procenty) siedzi przed kolekcją pustych kieliszków: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 i zastanawia się, co to znaczy 'pół kieliszka'. To znaczy:



Pyt. A. Nalewamy do połowy wysokości – jaki to procent objętości całego kieliszka?
Pyt. B. Do jakiego poziomu trzeba nalać, by wypełnić kieliszek w 50% (objętości)?

Przy nowej kolekcji kieliszków: K_6, K_7, K_8 Wincenty zakrzyknął: *Gdzież tu połowa?*



$r_6(x) = \sqrt{x}$

$r_7(x) = x^2$

$r_8(x) = \sqrt{1-(x+1)^2}$

4. Wyznacz środki ciężkości pełnych kieliszków (szkło pomijamy).

Przyjmijmy oznaczenia: L = półokrąg, P = półkole, S = półsfera, K = półkula; wszystkie o promieniu R. Podaj 'ładne' opisy tych zbiorów (np. tak, by środek ukł. wsp. był środkiem geometr.).

A. Fizycy mówią:
Gdy położenia skończenie wielu punktów materialnych o masach m_i opisują wektory $\vec{r_i}$, to równanie $(\sum_i m_i) \cdot \vec{r_c} = \sum_i (m_i \cdot \vec{r_i})$ definiuje *środek ciężkości* $\vec{r_c}$ tego układu.

Zapisz (używając odpowiednich całek) środki ciężkości dla L, P, S, K.
Oblicz je i porównaj wyniki. (Podziel się pracą z kolegą.)

B. Fizycy mówią:
Gdy ciało składa się ze skończenie wielu (rozłącznych) części C_i o gęstościach ρ_i, to masa tego ciała jest równa $\sum_i \rho_i \cdot |C_i|$, gdzie $|C_i|$ oznacza miarę części C_i.

Zapisz (używając odpowiednich całek) masy L, P, S, K przy założeniu:
- **a)** gęstości ρ są proporcjonalne do a-tej potęgi odległości od środka (geom.)
- **b)** gęstości ρ są proporcjonalne do b-tej potęgi odległości od osi symetrii

Zapisz (używając odpowiednich całek) środki ciężkości dla L, P, S, K przy założeniu:
- **c)** gęstości ρ są proporcjonalne do a-tej potęgi odległości od środka (geom.)
- **d)** gęstości ρ są proporcjonalne do b-tej potęgi odległości od osi symetrii

C. Fizycy mówią:
Gdy wektory $\vec{v_i}$ opisują prędkości skończenie wielu punktów materialnych o masach m_i, to energia kinetyczna tego układu jest równa $\sum_i m_i \cdot \frac{1}{2}|\vec{v_i}|^2 = \sum_i m_i \cdot \frac{1}{2}(\vec{v_i} \circ \vec{v_i})$.

Zapisz (używając odpowiednich całek) energie kinetyczne obracających się zbiorów L, P, S, K wokół osi symetrii ze stałą prędkością kątową ω przy założeniu:
- **o)** gęstości ρ są stałe
- **a)** gęstości ρ są proporcjonalne do a-tej potęgi odległości od środka (geom.)
- **b)** gęstości ρ są proporcjonalne do b-tej potęgi odległości od osi symetrii

Powtórz zad. 5. dla obotu wokół prostej l
- **c)** stycznej do figury i równoległej do osi symetrii
- **d)** stycznej do figury i prostopadłej do osi symetrii

D. Fizycy mówią:
Układ $(m_i, \vec{r_i})$ skończenie wielu punktów materialnych przyciąga punkt materialny o masie m_0 i położeniu $\vec{r}_0$ z siłą równą $\sum_i \mathrm{G} \cdot \frac{m_i \cdot m_0}{||\vec{r}_i - \vec{r}_0||^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_0)$.

Zapisz (używając odpowiednich całek) z jaką siłą L, P, S, K przyciągają punkt materialny m_0 położony w środku (geom.) przy założeniu, że
- **o)** gęstości są stałe równe ρ
- **a)** gęstości ρ są proporcjonalne do a-tej potęgi odległości od środka (geom.)
- **b)** gęstości ρ są proporcjonalne do b-tej potęgi odległości od osi symetrii