

Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 2 (na ćwiczenia 20.10.2025)

Ćwiczenia

1. Sprawdź, które z podanych zbiorów są sobie równe:

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, & A_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, & A_3 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \\ A_4 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, & A_5 = \{\{3, 1\}, \{4, 2\}\}, & A_6 = \{1, 4, 3, 2\}, \\ A_7 = \{\{2, 1, 3, 4\}\}, & A_8 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, & A_9 = \{\{4, 3\}, \{2, 1\}\}. \end{array}$$

2. Podaj **elementy** następujących zbiorów:

$$\begin{array}{l} \emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\{a\}\}, \quad \{\{a, b\}, \{\{b, a\}\}, \emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}, \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}, \quad \{1, \{\emptyset\}, \{1\}\} \\ \{\{\{1\}\}\}, \quad \{\psi, \{\psi, \psi\}, \psi, \psi, \{\psi\}\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 7\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 0\}, \\ \{\alpha \in \mathbb{N} : \alpha \geq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 4\}, \quad \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 4\}, \quad \{x \in \mathbb{N} : |3 - x| < 3\}, \\ \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 4 \leq 0\}, \quad \{2x : x \in \mathbb{Z} \cap [-2, 3)\}, \quad \{2x : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-2, 3). \end{array}$$

3. Dla podanych funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ opisz zbiory $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x)\}$ (stosując oznaczenia na przedziały, półproste itp., a nie korzystając z dwukropka).

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ x^2 - 1 \leq 0 \vee x^2 - 4 > 0, & \text{(b)} \ x < 7 \Rightarrow x = 0, \\ \text{(c)} \ x^2 < 0 \Rightarrow x^2 = -1, & \text{(d)} \ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 1. \end{array}$$

4. Korzystając z metody zapisu zbiorów wykorzystującego operację zapisz poniższe zbiory.

- (a) Zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez 7.
- (b) Zbiór wszystkich liczb naturalnych, które z dzielenia przez 5 dają resztę 2.
- (c) Zbiór wszystkich kwadratów liczb naturalnych.
- (d) Zbiór wszystkich potęg liczby 5 o wykładniku naturalnym.
- (e) Zbiór wszystkich całkowitych wielokrotności liczby $\sqrt{2}$.
- (f)* Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, do których należy liczba 0.

5. Wyznacz zbiory $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \triangle B$ i $A \times B$ dla podanych zbiorów A i B .

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ A = \{z \in \mathbb{N} : \frac{z^2}{2} < \sqrt{3}\} & B = \{a \in \mathbb{Z} : a^2 > 0 \wedge |a - \frac{3}{2}| \leq \frac{3}{2}\}, \\ \text{(b)} \ A = [0, 3], & B = (1, 2]. \quad (A \times B - \text{wystarczy rysunek}) \end{array}$$

6. Czy zbiory $\{1, 2, x\}$ i $\{4, 5, \{2\}\}$ zawsze są rozłączne/mogą być rozłączne/nigdy nie są rozłączne? Wybierz właściwą odpowiedź i uzasadnij ją.

7. Niech $A = \{0, 2\}$. Wyznacz zbiory $A \cup (A \times A)$, $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

8. Niech $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$. Wypisz wszystkie zbiory X takie, że $X \cap A = X \setminus B$.

9. Rozważmy zbiory $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ i zawieranie

$$(A \cap B)^c \subseteq A \cap (B \cup C).$$

- (a) Podaj przykład zbiorów, dla których powyższe zawieranie nie zachodzi.
- (b) Podaj przykład zbiorów, dla których powyższe zawieranie zachodzi.

Zadania

10. Niech $A = \{\{x\}, \emptyset\}$, $B = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset\}\}$.

- (a) Jakiemu zbiorowi musi być równe x , by zachodziło $A \in B$?
- (b) Jakiemu zbiorowi musi być równe x , by zachodziło $A \subseteq B$?

11. Sprawdź, czy zachodzi zawieranie $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.

- (a) $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$,
- (b) $A = \{\mu, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\mu, \emptyset\}$,
- (c) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^6 + 7x^5 - 3x = 0\}$,
- (d) $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$,
- (e) $A = \{2, \{0\}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 - x^2 > 0\}$.

12. Używając jedynie symboli $\{, \}, \emptyset$ zapisz dwuelementowy zbiór, rozłączny ze zbiorem $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

13. Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 5\}$. Znajdź zbiór X , dla którego zachodzi równość $(A \triangle X) \triangle B = C$.

14. Dla danego zbioru A opisz jego zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$.

- (a) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$, (b) $A = \{\{\alpha, \beta\}, \emptyset\}$,
- (c) $A = \{\{\sigma, \tau, \rho\}\}$, (d) $A = \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

15. Ile co najmniej elementów ma zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$?

16. Dla zbioru $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ wyznacz zbiór $(\mathcal{P}(A) \cap A) \times A$.

17. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \wedge |x - 1| \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 9\}$.

- (a) Wyznacz zbiór $(B \setminus A) \times \mathcal{P}(A \setminus B)$.
- (b) Czy istnieje niepusty zbiór $X \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że $A \times X = X \times B$?