

Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 5 (na ćwiczenia w poniedziałek 17.11.2025)

Ćwiczenia

1. Zapisz formalnie poniższe zdania i funkcje zdaniowe. Poza zmiennymi i stałymi wolno używać **tylko** symboli logicznych, symboli równości, różności, nierówności, symboli operacji arytmetycznych oraz symboli należenia i zawierania.

- (a) Jeśli liczby x i y są różne, to albo x jest mniejsze od y , albo y jest mniejsze od x .
- (b) Nie każda liczba parzysta jest podzielna przez 8.
- (c) Jeśli kwadrat liczby rzeczywistej x nie jest liczbą dodatnią, to x jest zerem.
- (d) Wartość bezwzględna każdej liczby rzeczywistej jest równa tej liczbie lub liczbie przeciwnej.
- (e) Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma niepusty podzbiór właściwy.
- (f) Nie istnieje największa liczba rzeczywista.
- (g) Zbiór A ma przynajmniej dwa elementy.
- (h) Zbiór A ma co najwyżej dwa elementy.
- (i) Zbiór A ma dokładnie dwa elementy.
- (j) Żaden element zbioru A , który nie jest elementem zbioru B , nie jest rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$.
- (k) x jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych.
- (l) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.

Które z tych wyrażeń są zdaniami? Które są prawdziwe?

2. Znajdź zmienne występujące jako wolne i związane w poniższych wyrażeniach. Niektóre z tych wyrażeń są zapisane nieelegancko. Jak to poprawić?

- (a) $(\forall x (x > 3)) \Rightarrow y < 5$;
- (b) $\exists x \forall y (x > 3 \Rightarrow y < 5) \Rightarrow \forall x (x \neq 7)$;
- (c) $\forall x \forall y (x + y = z) \wedge \exists z (x - y \neq z)$;
- (d) $\forall x (x + y = z) \Rightarrow \exists z (\exists y (x - y \neq z) \wedge \forall z (x \cdot y \geq z))$.

3. Zaneguj poniższe wyrażenia (tnz. zapisz ich negacje bez użycia symbolu negacji).

- (a) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}) x < q < y)$;
- (b) $\exists x(x < 3 \vee \forall y(y > x \Rightarrow y \geq 3))$.

4. W poniższych przykładach wskaż **skończony** zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$, dla którego dane zdanie jest prawdziwe lub uzasadnij nieistnienie takiego zbioru.

- (a) $(\forall x)(x \in X \Rightarrow 2|x \vee \neg 2|x)$; (b) $(\forall x)(2|x \vee \neg 2|x \Rightarrow x \in X)$;
- (c) $(\forall x \in X) 2|x$; (d) $(\forall x)(x \in X \Leftrightarrow 2|x)$.

5. Oceń prawdziwość poniższych zdań (warto zrozumieć ich znaczenie).

- (a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) x = 2y$; (b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y$;
- (c) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) x = 2y$; (d) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) x = 2y$;
- (e) $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}) x = 2y$; (f) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y$.

6. Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $\cos x < \frac{1}{2}$ za pomocą sumy uogólnionej.

Zadania

7. Zgadnij, a następnie sprawdź, które ze zdań ψ_1, ψ_2 jest równoważne zdaniu φ ($A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$).

- (a) $\varphi = (\forall y \in \mathbb{R})(y < 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(x < 0 \wedge x > y))$
 $\psi_1 = (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(y < 0 \wedge x < 0 \wedge x > y)$, $\psi_2 = (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(y < 0 \Rightarrow x < 0 \wedge x > y)$;
- (b) $\varphi = (\exists y \in \mathbb{R})((\forall x \in A)(x < y) \Rightarrow y \geq 0)$
 $\psi_1 = (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x < y \Rightarrow y \geq 0)$, $\psi_2 = (\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in A)(x < y \Rightarrow y \geq 0)$.

8. Podaj przykłady funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{R}$, pokazujące że zdanie formalne

- (a) $(\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x)$,
- (b) $(\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x) \Rightarrow (\exists x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$,
- (c) $(\exists x)(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x))$.

nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów.

9. Podaj przykład funkcji zdaniowej $\varphi(x, y)$ o zakresie zmiennych $x, y \in \mathbb{N}$, pokazujący że zdanie formalne

- (a) $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$,
- (b) $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi(x, y)$,
- (c) $(\exists x)(\forall y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$,
- (d) $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y)\varphi(y, y)$,
- (e) $(\exists x)\varphi(x, x) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\varphi(x, y)$,
- (f) $(\exists x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x, x)$.

nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów.

10. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki:

- $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in A)k < n$,
- $(\forall n \in A)(\exists k \in A)k < n$.

11. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{Z}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki:

- $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall k \in \mathbb{Z})(n < k \Rightarrow k \in A)$,
- $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists k \in \mathbb{Z})(k < n \wedge k \notin A)$,
- $-100 \in A$.

12. Dla podanych rodzin indeksowanych $\{A_i : i \in I\}$ wyznacz $\bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i$.

- (a) $I = \mathbb{R}, \quad A_i = \{x \in \mathbb{R} : i \leq x\}$;
- (b) $I = \mathbb{N}, \quad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i+1} \leq x \leq 2 + \frac{1}{i+1}\right\}$;
- (c) $I = \mathbb{N}^+, \quad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i} \leq x < i + \frac{1}{i}\right\}$;
- (d) $I = \mathbb{N}^+, \quad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i} \leq x < 2 - \frac{1}{i^2}\right\}$;
- (e) $I = \mathbb{N}^+, \quad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 3 + \frac{(-1)^i}{i} \leq x < 2i - \frac{(-1)^i}{i}\right\}$;
- (f) $I = \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}, \quad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-(-1)^i}{2i} \leq x < i - 1 - \frac{1}{i^2}\right\}$;
- (g) $I = (0, +\infty), \quad A_i = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y \leq i \cdot x\}$;
- (h) $I = (0, +\infty), \quad A_i = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y \geq i \cdot x^2\}$.

13. Niech $A_{ij} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(-1)^i}{j} \leq x \leq i + \frac{1}{j}\right\}$. Wyznacz

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}.$$