

Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 6 (na ćwiczenia 24.11.2025)

Ważna uwaga wstępna: należy **zrozumieć** różnicę pomiędzy zadaniem 1 z listy 5 a poniższymi zadaniami. W tamtym zadaniu mieliśmy wyrażenia będące zdaniem oraz funkcjami zdaniowymi niebędącymi zdaniami i należało rozróżniać te sytuacje. W szczególności niedopuszczalne było dopisywanie kwantyfikatora kwantyfikującego np. po x , gdy mieliśmy do czynienia z funkcją zdaniową zmiennej x .

Natomiast w zadaniach z tej listy mamy do czynienia z **twierdzeniami** (prawdziwymi bądź fałszywymi), co jest jasno zadeklarowane. Twierdzenie **zawsze** jest zdaniem. Jeżeli jego sformułowanie wygląda jak funkcja zdaniowa (pojawiają się zmienne, które wydają się być zmiennymi wolnymi), to oznacza, że na początku są domyślne kwantyfikatory ogólne – wszystkie zmienne wyglądające na wolne są kwantyfikowane ogólnie. Zatem np. *twierdzenie* „Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.” jest tożsame z *twierdzeniem* „Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $-x^2 + 2x - 1 < 10$.” (czego oczywiście nie moglibyśmy powiedzieć, gdybyśmy nie mieli tej dodatkowej informacji, że mamy do czynienia z twierdzeniami).

Wskazówki ogólne:

- Określ dokładnie założenia i tezę.
- Przypomnij sobie definicje wszystkich pojęć występujących w sformułowaniu twierdzenia. Zastanów się, czy rozumiesz treść zadania.
- Przyjrzyj się uważnie tezie. Musisz zrozumieć, co jest celem dowodu.
- Używaj prozy, np. takich wyrażen jak „zatem”, „więc”, „czyli”, „z tego wynika, że”, „wówczas”, „w szczególności”, „mamy” itp.
- Jeżeli w dowodzie pojawia się nowe oznaczenie, należy je wprowadzić (*każdy aktor wchodzący na scenę dowodu musi zostać przedstawiony*, jak mawiali klasycy).
- Można pisać kolejne kroki dowodu jeden pod drugim, pisząc wyraźnie, z czego aktualnie korzystamy (definicji, założenia, znanego faktu).
- Dowód powinien być zapisany zdaniami w języku polskim. Nie należy rozpoczynać zdania od symbolu/wzoru. Różne symbole/wzory powinny być oddzielone słowami.

1. Udowodnij następujące fakty, zapisując je wcześniej symbolicznie. Postaraj się przejrzeć sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia z sytuacją ogólną, czy szczegółową.

- Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.
- Jeżeli s i t są liczbami wymiernymi i $t \neq 0$, to liczba $\frac{s}{t}$ jest wymierna.
- Jeżeli a, b i c są liczbami całkowitymi oraz $a|b$ i $b|c$, to $a|c$.
- Jeżeli n i m są nieparzystymi liczbami naturalnymi, to $n \cdot m$ jest nieparzystą liczbą naturalną.
- Niech $x \in \mathbb{Z}$. Wtedy liczba $11x - 7$ jest nieparzysta dokładnie wtedy, gdy liczba x jest parzysta.
- Istnieje jedyna liczba całkowita x taka, że $x^2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}x$.
- Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.
- Jeśli a, b, c są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $a + b + c$ jest podzielne przez 3.
- Liczba naturalna dodatnia daje taką samą resztę z dzielenia przez 3 jak suma jej cyfr.

2. Udowodnij lub obal poniższe twierdzenia (staraj się jednak nie wykonać obydwu poleceń naraz), zapisując je wcześniej symbolicznie. Postaraj się przejrzeć sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia z sytuacją ogólną, czy szczegółową.

- (a) Niech A będzie zbiorem. Jeśli $A \cap B = \emptyset$ dla dowolnego zbioru B , to $A = \emptyset$.
- (b) Dla każdego niepustego zbioru A istnieje zbiór B taki, że $A \cup B = \emptyset$.
- (c) Każda liczba całkowita nieparzysta jest sumą trzech liczb całkowitych nieparzystych.
- (d) Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wtedy przynajmniej jedna z liczb $a + b$, $a + c$ i $b + c$ jest parzysta.
- (e) Niech A, B, C będą zbiorami. Jeśli $A \setminus B = A \setminus C$, to $B = C$.
- (f) Istnieją trzy różne liczby całkowite a, b, c takie, że $a^b = b^c$.
- (g) Dla każdej liczby naturalnej x istnieje liczba naturalna y taka, że $x < y < x^2$.
- (h) Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- (i) Niech $x \in \mathbb{Z}$. Jeśli $3 \nmid (x^2 - 1)$, to $3 \mid x$.
- (j) Dla każdej dodatniej liczby wymiernej b istnieje liczba niewymierna a taka, że $0 < a < b$.
- (k) Liczby naturalne a, b, c spełniają warunek $a \cdot b \cdot c = 71286$. Wówczas co najmniej jedna z sum $a + b$, $b + c$ nie jest podzielna przez 3.

3. Oceń poniższy dowód:

Twierdzenie: Każda parzysta liczba całkowita jest sumą dwóch nieparzystych liczb całkowitych.

Dowód: Załóżmy, że x i y są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Wówczas $x = 2k + 1$ i $y = 2l + 1$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$. Wobec tego $x + y = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1)$. Ponieważ $k + l + 1$ jest liczbą całkowitą, więc liczba $x + y$ jest parzysta, co kończy dowód. $\square$

4. Oceń poniższy dowód:

Twierdzenie: Jeśli x jest liczbą niewymierną, a y liczbą wymierną, to $z = x - y$ jest liczbą niewymierną.

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że liczba $z = x - y$ jest wymierna. Wobec tego $z = \frac{a}{b}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, więc niech $x = \sqrt{2}$. Skoro $y \in \mathbb{Q}$, to $y = \frac{c}{d}$ dla pewnych $c, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Zatem

$$\sqrt{2} = x = y + z = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Ponieważ $ad + bc$ i bd są liczbami całkowitymi i $bd \neq 0$, więc $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, sprzeczność. $\square$

5. Rozważmy następujący dowód:

Dowód: Załóżmy, że n jest nieparzystą liczbą całkowitą. Wtedy $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$3n - 5 = 3(2k + 1) - 5 = 6k + 3 - 5 = 6k - 2 = 2(3k - 1).$$

Ponieważ liczba $3k - 1$ jest całkowita, więc liczba $3n - 5$ jest parzysta.

Które z poniższych stwierdzeń zostało dowiedzione:

- (a) Liczba $3n - 5$ jest parzysta.
- (b) Jeśli n jest nieparzystą liczbą całkowitą, to liczba $3n - 5$ jest parzysta.
- (c) Niech n będzie liczbą całkowitą. Jeśli liczba $3n - 5$ jest parzysta, to liczba n jest nieparzysta.
- (d) Niech n będzie liczbą całkowitą. Jeśli liczba $3n - 5$ jest nieparzysta, to liczba n jest parzysta.

6. Zrób rachunek sumienia i odpowiedz sobie, których z poniższych „metod” dowodzenia zdarzało Ci się używać? A może nadużywać?

- Przez zaprzeczenie założenia.
- Przez założenie tezy.
- Przez sprowadzenie na manowce.
- Przez rozważenie przypadków i zbagatelizowanie każdego z nich.
- Przez ogład – *Jak łatwo zauważyć...*
- Przez podobieństwo – *Coś mi to przypomina...*
- Przez autorytet – *Na pewno tak będzie.*
- Przez przymus – *To MUSI być prawdą.*
- Przez sztuciec – *A nuż wyjdzie.*
- Prawie nie wprost – zakładamy fałszywość tezy i niczego nie dostajemy.
- Psychodeliczna – przez nadużycie symboli.
- Harcerska – podchody dookoła dowodu.
- Aferalna – na początku założenie, w środku jakaś afera, na końcu teza.
- Ezoteryczna – *Intuicyjnie czujemy, że...*
- Jest dobrze, bo jest dobrze – zakładamy założenie. Ponieważ założenie jest prawdziwe, więc teza też.