

Wstęp do matematyki R
Lista zadań nr 8 (na ćwiczenia 8.12.2025).

Z listy 7

- 6. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ daną wzorem $f(n, k) = nk + 1$. Podaj przykład nieskończonego zbioru $C \subseteq \mathbb{N}^2$, takiego że funkcja $f \upharpoonright C$ jest różnowartościowa. Odpowiedź uzasadnij.
- 5. Dobierz przeciwdziedzinę funkcji $f \upharpoonright C$, określonej w zadaniu 11, tak by miała ona funkcję odwrotną i wyznacz tę funkcję odwrotną.
- 4. Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $g : Y \rightarrow Z$. Udowodnij, że
- (a) jeśli f jest różnowartościowa i g jest różnowartościowa, to $g \circ f$ jest różnowartościowa;
 - (b) jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa, to f jest różnowartościowa;
 - (c) jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa i f jest „na”, to g jest różnowartościowa.
- 3. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$ oraz niech $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (a) Załóżmy, że g jest różnowartościowa. Czy $f \circ g$ może być różnowartościowa? A $g \circ f$?
 - (b) Załóżmy, że g jest surjekcją. Czy $f \circ g$ może być surjekcją? A $g \circ f$?
- Odpowiedzi uzasadnij.
- 2. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ daną wzorem $f(x) = x^2 - 3x$. Zdefiniuj funkcję $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tak, by funkcja $f \circ g$ była injekcją.
- 1. Niech funkcja $f : X \rightarrow Y$ będzie bijekcją. Udowodnij, że $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Ćwiczenia

1. Dla podanych poniżej funkcji wyznacz obraz $f[A]$ i przeciwbraz $f^{-1}[B]$.
- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 2$; $A = [-1, 2]$; $B = (2, 3]$,
 - (b) $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$; $f(x, y) = xy + 1$; $A = \{2\} \times \mathbb{N}$; $B = \{1\}$,
 - (c) $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$; $f(n, k) = n^2 - k$; $A = \{1\} \times \mathbb{Z}$; $B = \{0\}$,
 - (d) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$; $f(n) = \langle 2n, -2n \rangle$; $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$; $B = \mathbb{N} \times \{0\}$,
 - (e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = \langle x + y, x - y \rangle$; $A = \mathbb{R} \times \{0\}$; $B = \text{oś } OX$,
 - (f) $f : (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\})^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $f(C, D) = C \setminus D$; $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}) \times \{\mathbb{N}\}$; $B = \{\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$,
 - (g) $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(D) = \text{tr}(D)$; $A = \{E \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \det(E) = 0\}$; $B = \{0\}$,
 - (h) $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; $f(\varphi)(n) = \varphi(2n)$; $A = \{\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \xi(5) = 4\}$; $B = \{\mathbb{N} \times \{0\}\}$,
 - (i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $f(C, x) = C_x$; $A = \{\mathbb{R} \times \{0\}\} \times \mathbb{R}$.

Czy w podpunkcie (i) prawdą jest, że $f^{-1}[\emptyset] = f^{-1}[\{\emptyset\}]$?

2. Niech $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$, $\pi_2(x, y) = y$ będą funkcjami rzutów odpowiednio na pierwszą i drugą oś. Niech $A \subseteq X \times Y$. Wyznacz zbiory $\pi_1[A]$ i $\pi_2[A]$.

- (a) $X = Y = \mathbb{R}$; $A = \{\langle x, \sin x \rangle : x \in \mathbb{R}\}$;
- (b) $X = \mathbb{N}, Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $A = \{\langle n, N \rangle \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \in N\}$;
- (c) $X = Y = \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $A = \{\langle C, D \rangle \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2 : C \subsetneq D\}$.

Zadania

3. Niech $f : X \rightarrow Y$ i $A, B \subseteq X$. Udowodnij, że jeśli f jest różnowartościowa, to
- (a) $f[A] \cap f[B] = f[A \cap B]$,
 - (b) $f[A] \setminus f[B] = f[A \setminus B]$,
 - (c) $A = f^{-1}[f[A]]$.

4. Niech $f : X \rightarrow Y$. Udowodnij, że

- (a) jeśli dla dowolnych $A, B \subseteq X$ mamy $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, to funkcja f jest różnowartościowa;
- (b) jeśli dla dowolnych $A, B \subseteq X$ mamy $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$, to funkcja f jest różnowartościowa;
- (c) jeśli dla dowolnego $A \subseteq X$ mamy $A = f^{-1}[f[A]]$, to funkcja f jest różnowartościowa.

5. Niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ będzie dana wzorem $f(n, k) = 3^n + k$. Rozwiąż równanie

$$f^{-1}[X] = \{\langle 0, n \rangle : n \in \mathbb{Z} \cap (0, 3)\}.$$

6. Niech $f : (\mathbb{N}^+)^2 \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $f(n, k) = (n - 1)(k + 1)$.

(a) Wyznacz $f[\mathbb{N}^+ \times \{1\}]$ i $f^{-1}[\{0\}]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla dowolnych $A, B \subseteq (\mathbb{N}^+)^2$ mamy $f[A] \cap f[B] \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$?

Odpowiedź uzasadnij.

7. Niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ będzie dana wzorem $f(n, k) = (n + k)2^n$.

(a) Sprawdź, czy funkcja f jest 1 – 1 i czy jest „na”. Odpowiedź uzasadnij.

(b) Wyznacz $f[\{3\} \times \mathbb{N}^+] \cap (40, 60)$.

(c) Wyznacz $f^{-1}[(5, 9) \cap \mathbb{N}^+]$.

8. Niech funkcja $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^+$ będzie zadana wzorem $f(n, k) = (k + 1)^n$.

(a) Sprawdź, czy funkcja f jest 1 – 1 i czy jest „na”. Odpowiedź uzasadnij.

(b) Wyznacz $f\left[(\mathbb{N} \cap (0, 3))^2\right]$.

(c) Wyznacz $f^{-1}[\{1\}]$.