

Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 12 (na ćwiczenia 21.01.2026).

Ćwiczenia

1. Dla podanych zbiorów A i B znajdź funkcję ustalającą równoliczność między nimi oraz sprawdź, że jest ona faktycznie bijekcją.

- (a) $A = \{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$;
- (b) $A = \mathbb{N}^+$, $B = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N}) n = 5k\}$;
- (c) $A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$, $B = \mathbb{R}$;
- (d) $A = (0, 1)$, $B = (-2, +\infty)$;
- (e) $A = (-\infty, 3]$, $B = [-2, 1)$;
- (f) $A = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$;
- (g) $A = [0, 1]$, $B = (3, 5)$;
- (h) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Zadania

2. Udowodnij, że

- (a) $\{n \in \mathbb{N} : 2|n\} \sim \{n \in \mathbb{Z} : \neg 2|n\}$;
- (b) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 5\}$;
- (c) $[0, 2] \setminus \{1\} \sim (1, 3) \cup \{4, 5\}$;
- (d) $(0, 2) \sim [0, 1]$;
- (e) $\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{N}) y = 3^x\} \sim \{y \in \mathbb{N} : (\exists x \in \mathbb{R}) y = 3^x\}$.

Uwaga: W tym zadaniu nie ma konieczności znajdowania bijekcji.

3. O zbiorach A i B wiemy, że $|A \cap B| = |A \cup B|$. Uzasadnij, że $A \sim B$.

4. Zbadaj, czy dla dowolnych nieskończonych zbiorów A, B, C i D prawdziwe są poniższe zdania.

- (a) Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \xrightarrow{1-1} B$, która nie jest „na”, to $|A| < |B|$.
- (b) Jeśli $|A| < |B|$ i $|B| < |C|$, to $|A| < |C|$.
- (c) Jeśli $|A| \leq |B|$, to $|A \times C| \leq |B \times C|$.
- (d) Jeśli $|A| < |C|$ i $|B| \leq |D|$, to $|A \cup B| < |C \cup D|$.
- (e) Jeśli istnieją surjekcja $f : B \rightarrow C$ i injekcja $g : C \rightarrow B$, to $B \sim C$.

5. Dla danych nieskończonych, parami różnych zbiorów A, B, C, D wiemy, że $A \sim C$ i $B \sim D$. Czy jeśli $A \cup B \sim C \cup D$, to $A \cap B \sim C \cap D$?

6. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C i D prawdą jest, że jeśli $A \sim C$, $B \sim D$ oraz $B \subsetneq A$, $D \subsetneq C$, to $A \setminus B \sim C \setminus D$?

7. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D , jeśli $A \sim C$ i $B \sim D$, to $A^B \sim C^D$.