

Wstęp do matematyki R

Lista zadań nr 13 (na ćwiczenia 26.01.2026).

Ćwiczenia

1. Niech R będzie relacją równoważności na niepustym zbiorze X . Udowodnij, że $|X/R| \leq |X|$.
2. Pokaż, że obraz zbioru przeliczalnego względem dowolnej funkcji jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Czy to samo można powiedzieć o przeciwobrazie?
3. Niech $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Wskaż zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $|P \cap X| = |X \setminus P| = |\mathbb{N} \setminus X| = \aleph_0$. Odpowiedź uzasadnij.
4. Udowodnij, że funkcje $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zadane wzorami
$$f(n, k) = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} + k \text{ i } g(n, k) = 2^n(2k+1) - 1$$
są bijekcjami.
5. Zbiór A jest nieprzeliczalny, a zbiór B przeliczalny. Co można powiedzieć o mocy zbioru $A \setminus B$?
6. Zbiory A i B są mocy continuum oraz $B \subseteq A$. Co można powiedzieć o mocy zbioru $A \setminus B$?

Zadania

7. Pokaż, że poniższe zbiory są co najwyżej przeliczalne.
 - (a) $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
 - (b) $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
 - (c) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$.
 - (d) Zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich kół na płaszczyźnie o środkach w punktach o obu współrzędnych wymiernych i promieniach, których długość jest liczbą wymierną.
 - (e) Zbiór parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.
 - (f) $\{D \subseteq \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus D| < \aleph_0\}$.
 - (g) Zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych stopnia 5.
 - (h) $\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{N}) y = \ln x\}$.Które z tych zbiorów są przeliczalne? Które mogą być przeliczalne?
8. Jak dużej mocy może być rodzina parami rozłącznych podzbiorów zbioru liczb naturalnych?
9. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sin x$. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, takiego że $|f^{-1}[A]| = \aleph_0$. Odpowiedź krótko uzasadnij.
10. Udowodnij, że następujące zbiory mają moc continuum.
 - (a) $A \times B$, gdzie A ma moc continuum, a B jest przeliczalny.
 - (b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
 - (c) Koło na płaszczyźnie, o środku w punkcie $\langle 0, 0 \rangle$ i promieniu 1.
 - (d) Okrąg na płaszczyźnie, o środku w punkcie $\langle 0, 0 \rangle$ i promieniu 1.
 - (e) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$.
 - (f) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \mathbb{N} \subseteq A\}$.
 - (g) $\{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\}$.
 - (h) $\{\langle x, y \rangle \in (0, 1) \times (1, +\infty) : x^y \in \mathbb{Q}\}$.
11. Co umiemy powiedzieć o mocy poniższych zbiorów? Odpowiedź uzasadnij.
 - (a) $\mathbb{Q} \cup [0, 1]$.
 - (b) $[0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}$.
 - (c) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$.
 - (d) Zbiór wszystkich niemalejących funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
 - (e) Zbiór wszystkich nierosnących funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$.
12. Jaka jest największa możliwa moc łańcucha w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$?