

Wstęp do matematyki R

Lista przygotowawcza przed kolokwium nr 1 (do pracy samodzielnej)

1. Zapisz poniższe zbiory stosując opis zbioru za pomocą **funkcji zdaniowej**:

- (a) Zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
- (b) Zbiór wszystkich par uporządkowanych liczb całkowitych, których obie współrzędne są tej samej parzystości.
- (c) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących do którejś z osi współrzędnych.
- (d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zadanej wzorem $f(x) = x^2$.
- (e) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, do których nie należy ani liczba 17, ani liczba 117.
- (f) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych o dodatnim wyrazie wolnym (zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych oznaczamy jako $\mathbb{Z}[x]$).
- (g) Zbiór wszystkich symetrycznych macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych (zbiór macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych oznaczamy jako $\mathcal{M}_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$).

2. Zapisz poniższe zbiory stosując opis zbioru za pomocą **operacji** oraz (być może) operację **sumy** zbiorów:

- (a) Zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
- (b) Zbiór wszystkich par uporządkowanych liczb całkowitych, których obie współrzędne są nieparzyste.
- (c) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących do którejś z osi współrzędnych.
- (d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zadanej wzorem $f(x) = x^2$.
- (e) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych stopnia co najwyżej 2.

3. Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 5\}$. Znajdź zbiór X , dla którego zachodzi równość $(A \triangle X) \triangle B = C$.

4. Rozważmy zbiór $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taki, że

$$\langle n, N \rangle \in A \Leftrightarrow n \in N.$$

Wyznacz cięcie A_5 . Wykaż, że dla każdego $N \subseteq \mathbb{N}$ mamy $A^N = N$ (Tutaj, oczywiście, A^N jest cięciem poziomym zbioru A w N).

5. Mamy dane zbiory

$$A = \{x^2 - 1 : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 3),$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : x > -2 \wedge \neg x^2 \geq 4\}.$$

Wyznacz zbiór $(\mathcal{P}(A) \triangle (\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\})) \times (B \setminus A)$.

6. Niech A i B będą **różnymi** zbiorami.

(a) Udowodnij, że warunek

$$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$$

jest warunkiem koniecznym do tego, by $A \cap B = \emptyset$.

(b) Czy warunek

$$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$$

jest warunkiem wystarczającym do tego, by $A \cap B = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnij.

7. Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami, takimi że $A, B \neq \emptyset$ oraz

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D.$$

Wykaż, że $A = B = C = D$.

Wskazówka: to nie jest takie proste, jak może się wydawać.