

Wstęp do matematyki R

Lista przygotowawcza przed kolokwium nr 2 (do pracy samodzielnej)

- Zapisz formalnie poniższe zdania i funkcje zdaniowe.
 - Każda liczba rzeczywista różni się o mniej niż $\frac{1}{2}$ od pewnej liczby całkowitej.
 - Jeśli liczba x jest dodatnia, to nie jest najmniejszą liczbą całkowitą.
 - Nie każda liczba naturalna ma dwa różne dzielniki nieparzyste.
 - Liczba x dzieli każdą liczbę parzystą większą od 10.
 - Każda parzysta liczba naturalna jest wielokrotnością pewnej nieparzystej liczby naturalnej.
- Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o następujących własnościach:
 - f nie jest funkcją stałą i $f \circ f$ jest funkcją stałą;
 - $f \circ f$ nie jest funkcją stałą i $f \circ f \circ f$ jest funkcją stałą.
- Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $(\forall x \in \mathbb{R}) g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.
- Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, która jest różnowartościowa.
- Podaj przykład funkcji $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$, która jest „na”.
- Dla podanych poniżej funkcji sprawdź, czy są 1 – 1 i czy są „na”.
 - $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x, n) = x^n$;
 - $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad f(X) = X \cap \{-x : x \in X\}$.
- Niech $f : X \rightarrow Y$ i niech funkcja $g : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ będzie zadana wzorem $g(B) = f^{-1}[B]$. Pokaż, że funkcja g jest 1 – 1 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest „na”.
- Dana jest funkcja $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^+$ określona wzorem $g(n, k) = 2^n + 3^k - 1$. Czy funkcja g jest 1 – 1? Czy funkcja g jest „na”? Odpowiedzi uzasadnij.
- Niech $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ będą dwiema różnymi funkcjami. Czy jeśli dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g(x)) = g(f(x))$, to funkcje f i g są wzajemnie odwrotne?
- Niech $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Z$. Udowodnij, że:
 - $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$,
 - $(g \circ f)^{-1}[B] = f^{-1}[g^{-1}[B]]$.
- Niech $f : X \rightarrow Y$ i niech $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ będzie rozłączną rodziną zbiorów. Wykaż, że rodzina $\{f^{-1}[A_i] : i \in \mathbb{N}\}$ jest również rozłączna.
- Niech $f : X \rightarrow Y$. Niech $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Sprawdź, czy $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$.
- Rozważamy relacje R , S i T na niepustym zbiorze X . Czy $R \subseteq S \implies T \circ R \subseteq T \circ S$?
- Sprawdź, czy dla dowolnych relacji równoważności R i S na zbiorze X relacje $R \cup S$ i $R \cap S$ są relacjami równoważności na X . Odpowiedź uzasadnij. Jeśli tak, to opisz ich zbiory ilorazowe.
- Rozważmy relacje R i S na zbiorze $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ zdefiniowane następująco:
$$xRy \Leftrightarrow 5 \mid (x^2 - y^2), \quad xSy \Leftrightarrow xy \neq 8.$$
 - Uzasadnij, że R jest, a S nie jest relacją równoważności.
 - Wyznacz A/R .
 - Czy relacja $R \cap S$ jest relacją równoważności? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy złożenie dwóch relacji zwrotnych musi być relacją zwrotną? Czy złożenie dwóch relacji przeciwzwrotnych może być relacją zwrotną? Odpowiedzi uzasadnij.
- Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2$. Na zbiorze $\mathbb{R}$ określamy relację równoważności R warunkiem

$xRy \Leftrightarrow$ zbiory $f^{-1}[\{x\}]$ i $f^{-1}[\{y\}]$ mają tyle samo elementów.

- Wyznacz $[0]_R$, $[-1]_R$ i $[1]_R$.
- Wyznacz $\mathbb{R}/R$.