

Wstęp do matematyki R

Lista zadań dodatkowych (przed kolokwium nr 3 i trochę przed egzaminem).

1. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}^2, \leq \rangle$, gdzie

$$\langle x, a \rangle \preceq \langle y, b \rangle \Leftrightarrow x \leq y \wedge a \leq b.$$

(a) Czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^2$ taki, że w A nie ma elementu największego i $\sup A = \langle 1, 2 \rangle$?

(b) Niech $B = \mathbb{N} \times \{4\}$. Czy zbiór B ma kres górny?

2. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy element minimalny jest maksymalny. Czy X może zawierać przynajmniej dwuelementowy łańcuch?

3. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+, \preceq \rangle$, gdzie

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow x|a \wedge y|b,$$

oraz funkcję rzutu na pierwszą oś $\pi_1 : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ zadaną wzorem $\pi_1(n, k) = n$.

(a) Wyznacz kres górny zbioru $\{2, 3, 4\}^2$.

(b) Podaj przykład sześćcioelementowego łańcucha $L \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, takiego że $|\pi_1[L]| = 2$.

(c) Czy jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ jest ograniczony z góry, to zbiór $\pi_1[A]$ jest skończony?

(d) Czy istnieje zbiór $B \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, który ma dokładnie dwa elementy maksymalne i nie ma kresu górnego?

4. Rozważmy porządek $\preceq$ na zbiorze $\mathbb{N}$ zadany warunkiem

$$x \preceq y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) x \cdot n^2 = y.$$

Niech $A = \{x \in \mathbb{N} : x|72\}$. Wszystkie poniższe pytania dotyczą relacji $\preceq$.

(a) Narysuj diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \preceq \rangle$ (z opisanymi wierzchołkami).

(b) Podaj przykład nieskończonego łańcucha w $\mathbb{N}$.

(c) Podaj przykład nieskończonego antyłańcucha w $\mathbb{N}$, składającego się z liczb parzystych.

(d) Czy zbiór $\{2, 3\}$ ma kres górny w $\mathbb{N}$? Odpowiedź uzasadnij (wyznacz kres lub uzasadnij jego nieistnienie).

5. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}, \preceq \rangle$, gdzie

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle a, b \rangle \Leftrightarrow x|a \wedge y \leq b.$$

Czy istnieje nieprzeliczalny antyłańcuch w $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}$?

6. Uzasadnij, że suma zbioru co najwyżej przeliczalnego i zbioru nieprzeliczalnego jest nieprzeliczalna.

7. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relację częściowego porządku w następujący sposób.

Niech $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Wtedy

$$f \preceq g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \leq g(n).$$

Niech $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $h(n) = n + 1$. Pokaż, że:

$$|\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \preceq h\}| = \mathfrak{c}.$$

8. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A i B jeśli $|A| = \mathfrak{c}$ i $|B| < \mathfrak{c}$, to $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$. **Wskazówka:** Porównaj z dowodem faktu, że zbiór liczb niewymiernych jest mocy continuum.

9. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym, a B zbiorem mocy continuum. Niech ponadto $A \subseteq B$. Co można powiedzieć o mocy zbioru $(B \times A) \setminus (A \times B)$? **Wskazówka:** Skorzystaj z poprzedniego zadania.

10. Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N}) f(2n) = 0\}$$

jest mocy continuum.

11. Rozważmy częściowy porządek na zbiorze $\mathbb{Z}$ zadany warunkiem

$$n \preceq m \Leftrightarrow n = m \vee (n = m + 1 \wedge 2|m).$$

Uzupełnij poniższe stwierdzenia.

(a) n jest maksymalny $\Leftrightarrow \dots$

(b) n jest minimalny $\Leftrightarrow \dots$

12. Niech $\leq_1$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{R}$, zadany warunkiem

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x < z \Rightarrow y < z).$$

Poniższe pytania dotyczą porządku $\leq_1$.

(a) Czy $3 \leq_1 \pi$? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Czy porządek $\leq_1$ jest liniowy? Odpowiedź uzasadnij.

(c) Wskaż podzbiór $B \subseteq \mathbb{R}$, w którym nie ma elementu maksymalnego i $\sup B = 2$.

(d) Niech $\leq_2$ będzie obcięciem relacji $\leq_1$ do zbioru $\mathbb{N}$. Czy dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$ prawdą jest, że

$$x \leq_2 y \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{N})(x < z \Rightarrow y < z)?$$

Odpowiedź uzasadnij.

13. Niech $f, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą funkcjami danymi wzorami $f(x) = 2x$, $h(x) = 0$. Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie dana wzorem $F(\varphi) = \varphi \circ f$. Wyznacz $|F^{-1}[\{h\}]|$. Odpowiedź uzasadnij.

14. Czy dla dowolnych **nieskończonych, parami rozłącznych** zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące stwierdzenia:

(a) $|A| < |B| \Rightarrow |A \times C| < |B \times C|$?

(b) $|A \cup C| \leq |B \cup C| \Rightarrow |A| \leq |B|$?

Odpowiedzi uzasadnij.

15. Niech X będzie zbiorem wszystkich przedziałów domkniętych na prostej (niezdegenerowanych). Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \preceq \rangle$, gdzie

$$I \preceq J \Leftrightarrow \min I \leq \min J \wedge \max I \leq \max J.$$

(a) Czy istnieje $J \in X$ nieporównywalny z przedziałem $[0, 2]$ i taki, że $J \preceq [1, 3]$? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Podaj przykład nieprzeliczalnego antyłańcucha w X .

(c) Podaj przykład nieskończonego łańcucha w X , którego żadne dwa elementy nie są rozłączne.

(d) Czy w zbiorze $A = \mathcal{P}([0, 1]) \cap X$ istnieje element maksymalny? Odpowiedź uzasadnij.

16. Wyznacz moce zbiorów

(a) $\{\langle x, y \rangle \in (0, 1) \times (0, 1) : x \cdot y \in \mathbb{Q}\}$;

(b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} : y = x^2\}$;

(c) zbiór wszystkich nierosnących funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Odpowiedzi uzasadnij.

17. W zbiorze $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ określamy relację $\preceq$ warunkiem

$$f \preceq g \Leftrightarrow f^{-1}[\{2\}] \subsetneq g^{-1}[\{2\}] \vee (f^{-1}[\{2\}] = g^{-1}[\{2\}] \wedge f^{-1}[\{1\}] \subseteq g^{-1}[\{1\}]).$$

Relacja $\preceq$ jest zwrotna i przechodnia.

(a) (2 pkt.) Udowodnij, że relacja $\preceq$ jest słabo antysymetryczna.

Dalsze polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$.

Niech funkcje $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ będą zadane wzorami $\varphi_1(n) = 1$, $\varphi_2(n) = 1 - (-1)^n$.

(b) (1 pkt.) Czy istnieje funkcja $\psi \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ taka, że $\varphi_1 \prec \psi \prec \varphi_2$? Odpowiedź uzasadnij.

(c) (2 pkt.) Wyznacz zbiór elementów minimalnych. Odpowiedź uzasadnij.

(d) (2 pkt.) Udowodnij, że każdy niepusty podzbiór $Z \subseteq \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ ma kres górny.