

Wstęp do matematyki R

Lista zadań dodatkowych (przed egzaminem).

Egzamin z lutego 2024 (czas: 180 min.)

1. (a) (2 pkt.) Niech $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ będą zbiorami niepustymi. Czy równość

$$[(A \cap B) \cup C] \setminus A = (A \cap B) \setminus C$$

jest warunkiem dostatecznym dla

$$A \subseteq B \Rightarrow A = C ?$$

Czy jest warunkiem koniecznym? Odpowiedzi uzasadnij.

(b) (2 pkt.) Dla zbioru $D \subseteq \mathbb{Z}$ przyjmijmy oznaczenie $D' = \{f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} : f^{-1}[\mathbb{N}] \subseteq D\}$. Udowodnij, że $D \subseteq E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $D' \subseteq E'$.

(c) (2 pkt.) Niech $S, T \subseteq \mathbb{R}^2$ będą relacjami spójnymi. Czy relacja $T \circ S$ musi być spójna? Odpowiedz uzasadnij.

(d) (2 pkt.) Udowodnij, że

$$|\{X \subseteq \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m)(2n \in X) \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(2n + 1 \notin X)\}| = \aleph_0.$$

2. Dla zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności R_A na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ warunkiem

$$f R_A g \iff (\forall n \in A) f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}].$$

Niech funkcje $\varphi, \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą zadane wzorami $\varphi(n) = 1 + (-1)^n, \psi(n) = \frac{1}{2}\varphi(n)$.

Niech $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) (1 pkt.) Czy $[\psi]_{R_P} \subseteq [\varphi]_{R_P}$? Odpowiedz uzasadnij.

(b) (2 pkt.) Czy $[\psi]_{R_P} \cap [\psi]_{R_{\mathbb{N} \setminus P}} = \{\psi\}$? Odpowiedz uzasadnij.

(c) (2 pkt.) Wyznacz $[\varphi]_{R_{\mathbb{N} \setminus P}}$.

(d) (3 pkt.) Wyznacz $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_P|$. Odpowiedz uzasadnij.

3. Dla relacji $R \subseteq \mathbb{N}^2$ definiujemy $D(R) = \{x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N})(\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R)\}$. Rozważamy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadaną wzorem

$$F(R) = \{x \in \mathbb{N} : x \in D(R) \wedge (\forall y \in \mathbb{N})(\langle y, x \rangle \in R \Rightarrow y = x)\}.$$

Niech $\mathbf{LIN} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ oznacza zbiór wszystkich relacji liniowo porządkujących zbiór $\mathbb{N}$.

(a) (1,5 pkt.) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedz uzasadnij.

(b) (1,5 pkt.) Czy funkcja F jest „na”? Odpowiedz uzasadnij.

(c) (2 pkt.) Wyznacz $F[\mathbf{LIN}]$.

(d) (2 pkt.) Czy zbiór $F^{-1}[\{\emptyset\}]$ jest skończony? Odpowiedz uzasadnij.

4. Niech $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ i niech relacja $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, zadanym warunkiem

$$A \preceq B \iff A \cap P \subsetneq B \cap P \vee (A \cap P = B \cap P \wedge A \cap (\mathbb{N} \setminus P) \subseteq B \cap (\mathbb{N} \setminus P)).$$

Polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$.

(a) (1 pkt.) Czy istnieje zbiór $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taki, że $\{1, 2, 3\} \prec C \prec \{2, 3, 4\}$? Odpowiedz uzasadnij.

(b) (2 pkt.) Wyznacz zbiór elementów maksymalnych w zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}$.

(c) (2 pkt.) Czy istnieje nieskończony łańcuch $\mathcal{L}$, spełniający warunek

$$(\forall A, B \in \mathcal{L})(A \neq B \Rightarrow A \cap P \neq B \cap P \wedge A \cap (\mathbb{N} \setminus P) \neq B \cap (\mathbb{N} \setminus P)) ?$$

Jeśli istnieje – podaj przykład, jeśli nie istnieje – uzasadnij dlaczego.

(d) (2 pkt.) Podaj przykład zbioru $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, w którym są dokładnie dwa elementy minimalne, dokładnie dwa elementy maksymalne oraz nieskończony antyłańcuch.

1. Niech A, B, C będą dowolnymi **niepustymi** podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

- (a) (2 pkt.) Czy warunek $A \cap B = \emptyset$ jest warunkiem dostatecznym dla $A \Delta C = B \Delta C \implies A \cap C = \emptyset$? Czy jest warunkiem koniecznym? Odpowiedzi uzasadnij.
- (b) (2 pkt.) Czy możliwe jest, by $A \cap B \neq \emptyset$ i $(A \times A) \setminus (B \times B) = C \times C$? Odpowiedź uzasadnij.
- (c) (2 pkt.) Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Czy prawdą jest, że

$$f \circ f = f \iff f \upharpoonright \text{rng}(f) = \text{id}_{\text{rng}(f)} ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

(d) (2 pkt.) Udowodnij, że jeśli $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ są relacjami równoważności takimi, że $R_1 \cup R_2$ też jest relacją równoważności, to $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

2. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadaną warunkiem

$$f R g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f^{-1}[\{f(n)\}] = g^{-1}[\{g(n)\}]).$$

Niech funkcje $\varphi, \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będą zadane wzorami $\varphi(n) = \frac{1-(-1)^n}{2}, \psi(n) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$.

- (a) (1 pkt.) Czy $[\varphi]_R \cap [\psi]_R \neq \emptyset$? Odpowiedź uzasadnij.
- (b) (2 pkt.) Wyznacz $[\varphi + \psi]_R$ (gdzie $(\varphi + \psi)(k) = \varphi(k) + \psi(k)$ dla $k \in \mathbb{N}$).
- (c) (2 pkt.) Udowodnij, że zbiór wszystkich iniekcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ jest klasą abstrakcji relacji R .
- (d) (3 pkt.) Podaj przykład jak największego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, którego elementy są parami nierównoważne (im większa moc zbioru, tym więcej punktów).

3. Rozważamy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ zadaną wzorem

$$F(A)(n) = A \cap [n, n+1).$$

Niech funkcja $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ będzie zadana wzorem $\varphi(n) = \{n + \frac{1}{2}\}$.

- (a) (1,5 pkt.) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.
- (b) (1,5 pkt.) Czy funkcja F jest „na”? Odpowiedź uzasadnij.
- (c) (2 pkt.) Niech $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : (\forall x, y \in B) x - y \in \mathbb{Z}\}$. Czy $\varphi \in F[\mathcal{B}]$? Odpowiedź uzasadnij.
- (d) (2 pkt.) Wyznacz $F^{-1}[D]$, gdzie $D = \{\psi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} : (\forall m \in \mathbb{Z}) \psi(m) \subseteq \mathbb{Z}\}$.

4. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych i niech relacja $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset\}$, zadanym warunkiem

$$A \preceq B \iff A = B \vee \bigcup_{n \in A} \{p \in \mathbb{P} : p \mid n\} \subsetneq \bigcup_{n \in B} \{p \in \mathbb{P} : p \mid n\}.$$

Niech $\mathbf{FIN} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset\} : |A| < \aleph_0\}$.

Polecenia dotyczą zbioru częściowo uporządkowanego $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset\}, \preceq \rangle$.

- (a) (1 pkt.) Czy istnieje zbiór $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ taki, że $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \prec C \prec \{2n : n \in \mathbb{N}^+\}$? Odpowiedź uzasadnij.
- (b) (2 pkt.) Podaj przykład nieskończonego antyłańcucha $\mathcal{A}$ takiego, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{2n : n \in \mathbb{N}^+\}) \cap \mathbf{FIN}$.
- (c) (2 pkt.) Czy zbiór $\mathbf{FIN}$ ma kres górny? Odpowiedź uzasadnij.
- (d) (2 pkt.) Wyznacz zbiór elementów minimalnych.