Wstęp do matematyki (lato 2025)

Lista zadań nr 1 (na ćwiczenia 4.03.2025)

Ćwiczenia

1. Dla poniższych zdań sprawdź, czy informacja $q = 0$ jest wystarczająca do wyliczenia wartości logicznej zdania złożonego. Jeśli tak, to wyznacz tę wartość, jeśli nie, to pokaż, że obie wartości są możliwe.
 (a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$;
 (b) $q \wedge (p \Rightarrow r)$;
 (c) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

2. Bez korzystania z tabelki oceń, czy poniższe zdania są tautologiami.
 (a) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$;
 (b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$;
 (c) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$;
 (d) $(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$;
 (e) $(p \Rightarrow (\neg q \wedge q \Rightarrow r)$.

3. Niech p, q, r oznaczają pewne zdania, a p', q', r' ich negacje. Zapisz negacje poniższych zdań złożonych bez użycia symbolu negacji $\neg$ (można używać pozostałych spójników oraz p, q, r, p', q', r'). Im krótsze końcowe wyrażenie, tym lepiej.
 (a) $(q \Rightarrow r \wedge p) \vee \neg r$;
 (b) $\neg(p \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
 (c) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

4. Przekształć schemat zdaniowy $((\neg q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge r)$ do możliwie najprostszej postaci, stosując prawa rachunku zdań.

5. Niech C oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważamy zdanie

Jeśli C jest rombem lub nie jest trapezem, to jeśli C jest trapezem, to jest kwadratem.

 (a) Zapisać schemat rozważanego zdanie symbolicznie, stosując oznaczenia:
t: C jest trapezem, k: C jest kwadratem, r: C jest rombem.
 (b) Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od czworokąta C).
  (i) Czworokąt C nie jest rombem.
  (ii) Czworokąt C jest trapezem.
  (iii) Czworokąt C nie jest prostokątem.

Zadania

6. Zapisz poniższe wyrażenia symbolicznie (nie chodzi o zapisanie ich schematów zdaniowych!). Dla których liczb naturalnych $n = 0, 1, 2, \ldots$ zdania te są **fałszywe**?
 (a) (Liczba $n + 7$ nie jest podzielna przez 4 i $n \geq 20$) pod warunkiem, że n jest liczbą dwucyfrową podzielną przez 15.
 (b) To, że liczba n jest nieparzysta jest warunkiem koniecznym do tego, że liczba n jest parzysta.
 (c) Liczba n jest mniejsza od 10, o ile jest większa od 7.
 (d) Liczba n jest podzielna przez 3 dokładnie wtedy, gdy jest niepodzielna przez 6.

W zadaniach 7, 8 i 9 **nie należy** skupiać się wyłącznie na strukturze logicznej rozważanych zdań.

7. O pewnej liczbie naturalnej n wiemy, że
• jeśli n jest podzielna przez 2, to z faktu, że n jest podzielna przez 4 wynika, że n jest podzielna przez 8 oraz
•• jeśli n nie jest podzielna przez 8, to n jest podzielna przez 2.
Czy stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 4? Odpowiedź uzasadnić.

8. O pewnej liczbie rzeczywistej x zakładamy, że
• jeśli $x > -1$, to z faktu, że $x > 0$ wynika, że $x > 1$ oraz
•• jeśli $x \leq 1$, to $x > -1$.
Czy stąd wynika, że liczba x jest dodatnia? Odpowiedź uzasadnić.

9. Dane są trzy **różne** liczby rzeczywiste x, y, z. Wiadomo, że
• jeśli x jest większa od y, to x jest większa od z oraz
•• jeśli z jest większa od y, to x jest większa od y.
Udowodnić, że z nie jest największą z liczb x, y, z.

10. Niech $\alpha(p, q)$ oznacza schemat zdaniowy, w którym jedynymi zmiennymi zdaniowymi są p i q.
(a) Znajdź wszystkie (z dokładnością do równoważności) schematy zdaniowe $\alpha(p, q)$, dla których schemat $p \vee q \Rightarrow \alpha(p, q)$ jest tautologią.
(b) Znajdź wszystkie (z dokładnością do równoważności) schematy zdaniowe $\alpha(p, q)$, dla których schemat $\alpha(p, q) \Rightarrow p \wedge q$ jest tautologią.

(Stwierdzenie *z dokładnością do równoważności* oznacza, że nie rozróżniamy schematów zdaniowych równoważnych, czyli takich, których równoważność jest tautologią.)