Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista zadań nr 2 (na ćwiczenia 11.03.2024)

Ćwiczenia

1. Sprawdź, które z podanych zbiorów są sobie równe:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \{1,2,3,4\}, && A_2 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}, && A_3 = \{\{1,2\},\{3,4\}\},\\
&A_4 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}, && A_5 = \{\{3,1\},\{4,2\}\}, && A_6 = \{1,4,3,2\},\\
&A_7 = \{\{2,1,3,4\}\}, && A_8 = \{\{1,2,3\},\{4\}\}, && A_9 = \{\{4,3\},\{2,1\}\}.
\end{aligned}
$$

2. Podaj elementy następujących zbiorów:
$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{a,b\},\{\{b,a\}\},\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset,\emptyset\}\},\{\emptyset,\emptyset,\emptyset\}\}$, $\{1,\{\emptyset\},\{1\}\}$
$\{\{\{\{1\}\}\}\}$ $\{\psi,\{\psi,\psi\},\psi,\psi,\{\psi\}\}$, $\{x\in\mathbb{N} : x^2 < 7\}$, $\{x\in\mathbb{N} : x^2 < 0\}$,
$\{\alpha\in\mathbb{N} : \alpha \geq 0\}$, $\{x\in\mathbb{N} : x^2 = 4\}$, $\{x\in\mathbb{Q} : x^2 = 4\}$, $\{x\in\mathbb{N} : |3-x| < 3\}$,
$\{x\in\mathbb{R} : x^2+4x+4 \leq 0\}$, $\{2x : x\in\mathbb{Z}\cap[-2,3)\}$, $\{2x : x\in\mathbb{Z}\}\cap[-2,3)$.

3. Korzystając z metody opisu zbiorów za pomocą funkcji zdaniowej opisz poniższe zbiory.
   (a) Zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 7.
   (b) Zbiór parzystych liczb całkowitych niedodatnich.
   (c) Zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3 i nie mniejszych niż 200.
   (d) Zbiór liczb naturalnych, których kwadrat daje resztę 1 przy dzieleniu przez 5.
   (e) Zbiór liczb pierwszych.

4. Korzystając z metody opisu zbiorów za pomocą operacji opisz poniższe zbiory.
   (a) Zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 7.
   (b) Zbiór kwadratów liczb naturalnych.
   (c) Zbiór potęg liczby 5 o wykładniku naturalnym.
   (d) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby $\sqrt{2}$.

5. Czy zbiory $\{1,2,x\}$ i $\{4,5,\{2\}\}$ zawsze są rozłączne/mogą być rozłączne/nigdy nie są rozłączne? Wybierz właściwą odpowiedź i uzasadnij ją.

6. Podaj przykłady parami różnych zbiorów A,B,C takich, że
   (a) $A\cap(B\setminus C) = \{2,3,4\}$
   (b) $(A\cup B)\setminus(B\cap C) = [0,+\infty)$
   (c) $A\setminus B = A\cup\mathbb{Q}$.

Zadania

6. Rozważmy zbiory $A,B,C\subseteq\mathbb{N}$ i zawieranie

$$(A\cap B)^c \subseteq A\cap(B\cup C).$$

   (a) Podaj przykład zbiorów, dla których powyższe zawieranie nie zachodzi.
   (b) Podaj przykład zbiorów, dla których powyższe zawieranie zachodzi.

7. Niech $A = \{\{x\},\emptyset\}$, $B = \{\emptyset,\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\}\}$.
   (a) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A\in B$?
   (b) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A\subseteq B$?
Odpowiedzi uzasadnij.

8. Dane są zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Dla dowolnego x to, że x jest elementem A jest warunkiem koniecznym, by x był elementem B. Czy to oznacza, że
(a) $A \subseteq B$?
(b) $B \subseteq A$?
(c) $A \cap B^c = \emptyset$?
(d) $B \cap A^c = \emptyset$?
Odpowiedzi uzasadnij.

9. Niech A będzie zbiorem liczb, które są kwadratami liczb naturalnych, B zbiorem ujemnych liczb rzeczywistych, a $C = \{n \in \mathbb{Z} : 2 < |n| < 6\}$.
(a) Wyznacz zbiór $(C \setminus B) \setminus A$.
(b) Znajdź wszystkie podzbiory $U \subseteq C$ takie, że $U \setminus B = \emptyset$, ale $U \cap A \neq \emptyset$.

10. Niech $E = \{0, 1, 2\}, F = \{1, 2, 3\}$. Wypisz wszystkie zbiory U takie, że $E \cap U = U \setminus F$.

11. Używając jedynie symboli $\{, \}, \emptyset$ zapisz dwuelementowy zbiór, rozłączny ze zbiorem $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

12. Sprawdź, czy zachodzi zawieranie $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.
(a) $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$,
(b) $A = \{\mu, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\mu, \emptyset\}$,
(c) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^6 + 7x^5 - 3x = 0\}$,
(d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^6 + 7x^5 - 3x = 0\}$,
(e) $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$,
(f) $A = \{2, \{0\}\}$, $B = \{\{x \in \mathbb{N} : 1 - x^2 > 0\}\}$.