Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista zadań nr 3 (na ćwiczenia 18.03.2024)

Ćwiczenia

1. Dla danego zbioru A opisać jego zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$.
   (a) $A = \{\{1,2\},\{3\},1\}$, (b) $A = \{\{\alpha,\beta\},\emptyset\}$,
   (c) $A = \{\{\sigma,\tau,\rho\}\}$, (d) $A = \{\mathbb{N},\{\mathbb{N}\}\}$.

2. Wypisz wszystkie elementy zbiorów: $\mathcal{P}(\{1,2\}\times\{5\})$, $\mathcal{P}(\{1,2\})\times\{5\}$, $\{1,2\}\times\mathcal{P}(\{5\})$.

3. Niech $A = \{0,2\}$. Wyznacz zbiory $A\cup(A\times A)$, $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

4. Podaj przykład pięcioelementowego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że $1 \in \pi_{\mathbb{R}}[A] = \pi^{\mathbb{R}}[A]$ i oba zbiory $\pi_{\mathbb{R}}[A], \pi^{\mathbb{R}}[A]$ są trzyelementowe. Następnie wyznacz cięcia A_1 i A^1.

5. Czy istnieje zbiór trzynastoelementowy $A \subseteq [0,1]^2$ taki, że zbiór $\pi_{[0,1]}[A]$ jest trzyelementowy, a zbiór $\pi^{[0,1]}[A]$ jest czteroelementowy? Odpowiedź uzasadnij.

6. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}\times\{1,2\})$? Odpowiedź krótko uzasadnij.

7. Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory $A\times B$ i $B\times A$.
   (a) $A = (1,2]\cup\{3\}$, $B = [1,3)$
   (b) $A = \mathbb{N}$, $B = [-1,1]$.

8. Podaj przykład dwóch różnych elementów zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}))\setminus\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

9. Narysuj w układzie współrzędnych następujące zbiory:
   (a) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sin x\}$,
   (b) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2+y^2 \leq 9\}$,
   (c) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y\}$,
   (d) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \sin x + \cos y < \pi\}$,
   (e) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \sin x = \cos y \Leftrightarrow \cos y = \sin x\}$,
   (f) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 :$ istnieje $t \in \mathbb{N}$ takie, że $x+t<y\}$.

Zadania

10. Niech zbiór $A \subseteq [0,1]^2$ będzie taki, że dla każdego $a \in [0,1]$ mamy $A_a = \left[\frac{1}{2}a, 1-\frac{1}{2}a\right]$. Wyznacz A^b dla każdego $b \in [0,1]$.
Wskazówka: Rysunek pomoże.

11. Podaj przykład **rozłącznych** podzbiorów $A,B \subseteq [0,1]^2$ (może być rysunek, choć opis formalny mile widziany w ramach treningu) takich, że

$$\pi_{[0,1]}[A] = \pi^{[0,1]}[A] = \pi_{[0,1]}[B] = \pi^{[0,1]}[B] = [0,1].$$

Czy uda się znaleźć przykład takich zbiorów, jeżeli dodatkowo będziemy wymagać, by istniały takie $a,b \in [0,1]$, że $A_a = B^b = [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

12. Niech $X = \{0,1,2,3,4,5\}$. Zdefiniujmy $A \subseteq \mathcal{P}(X)\times P(X)$ w następujący sposób:

$$\langle C,D\rangle \in A \Leftrightarrow C \subseteq D.$$

Wyznacz zbiory $A_\emptyset, A^\emptyset, A_{\{0,1,2\}}$ i $A^{\{0,1,2\}}$.

13. Niech $A = \{x\in\mathbb{Z} : 2|x \wedge |x-1| \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 9\}$.
   (a) Wyznaczyć zbiór $(B\setminus A)\times\mathcal{P}(A\setminus B)$.
   (b)* Czy istnieje niepusty zbiór $X\subseteq\mathbb{Z}$ taki, że $A\times X = X\times B$? Odpowiedź uzasadnij.

14. Rozważmy zbiór $A = ([1,3]\times(2,5])\cup([2,4]\times(1,3))$. Ile elementów ma zbiór $\{A_x : x\in\mathbb{R}\}$? Odpowiedź uzasadnij.
Wskazówka: Rysunek i zrozumienie pytania niezbędne.