Wstęp do matematyki (lato 2025)

Lista zadań nr 4 (na ćwiczenia 25.03.2025)

Ćwiczenia

1. Podaj przykład takich niepustych zbiorów $A, B, C \subseteq \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$, że

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B.$$

2. Czy istnieją zbiory A, B i C takie, że

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \text{i} \quad A \cap C = \emptyset \quad \text{i} \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Odpowiedź uzasadnij.

3. Niech Ω będzie przestrzenią, a zbiory A, B i C podzbiorami tej przestrzeni. Niech

$$X = \{x \in \Omega : x \in A \vee (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\}.$$

Wyraź zbiór X^c za pomocą zbiorów A, B i C oraz operacji $\cup, \cap, {}^c$.

4. Niech $X = \{0,1,2,3,4,5\}, A = \{0,2,4\}, B = \{2,3,5\}$. Wypisz wszystkie zbiory $U \subseteq X$, które spełniają łącznie następujące warunki:
- nie są rozłączne ze zbiorem A,
- są rozłączne ze zbiorem B,
- nie zawierają się w zbiorze A.

Zadania

5. Sprawdź, czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą poniższe równości. Jeśli tak – udowodnić, jeśli nie – podać odpowiednie przykłady.
   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
   (c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$,
   (d) $(A \cap B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$.

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \setminus D \subseteq B \setminus C.$$

7. O zbiorach $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że:
   (a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
   (b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
   (c) $A \cap C = \emptyset$?
Odpowiedzi uzasadnij.

8. Czy dla dowolnych **niepustych** zbiorów A, B i C prawdziwe są zależności
   (a) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
   (b) $A \not\subseteq B \times C$?
Odpowiedzi uzasadnij.

9. O zbiorach $A, B \subseteq \mathbb{R}$ wiemy, że zachodzą łącznie warunki
(i) jeżeli $A \subseteq B$, to A ma nieskończenie wiele elementów,
(ii) jeżeli $A \neq \emptyset$, to $3 \in B$,
(iii) $A \cup B = \mathbb{R}$.
   (a) Czy z powyższych warunków wynika, że $A \neq \emptyset$?
   (b) Czy z powyższych warunków wynika, że $3 \notin A$?
Odpowiedzi uzasadnij.

10. Niech A, B, C i D będą zbiorami niepustymi. Czy z faktu $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$ wynika, że $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnić.
Wskazówka: Dobry rysunek może pomóc.