

Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista zadań nr 5 (na ćwiczenia 15.04.2024)

Ćwiczenia

- Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, używając odpowiednich oznaczeń:
 - Każdy student, który przyszedł na egzamin, jest przygotowany. (Przykładowe oznaczenia: S – zbiór studentów, $e(x)$ – x przyszedł na egzamin, $p(x)$ – x jest przygotowany)
 - Na egzamin przyszli tylko przygotowani studenci.
 - Żaden student, który przyszedł na egzamin, nie był przygotowany.
 - Na egzamin przyszedł student.
 - W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszka przynajmniej jedna osoba. (Przykładowe oznaczenia: M – zbiór mieszkań w tym bloku, O – zbiór osób, $m(x, y)$ – x mieszka w y)
 - W pewnym mieszkaniu w tym bloku nikt nie mieszka.
 - Każdy człowiek zna człowieka, który nie zna człowieka, który nikogo nie zna. (Przykładowe oznaczenia: L – zbiór ludzi, $z(x, y)$ – x zna y .)
 - Pewne trzy osoby nie znają się wzajemnie.
 - Nie wszyscy ludzie znają wszystkich, którzy ich znają.
- Znaleźć zmienne występujące jako wolne i związane w poniższych wyrażeniach. Niektóre z tych wyrażeń są zapisane w sposób, którego należy unikać. Jak to poprawić?
 - $(\forall x (x > 3)) \Rightarrow y < 5$;
 - $\exists x \forall y (x > 3 \Rightarrow y < 5) \Rightarrow \forall x (x \neq 7)$;
 - $\forall x \forall y (x + y = z) \wedge \exists z (x - y \neq z)$;
 - $\forall x (x + y = z) \Rightarrow \exists z (\exists y (x - y \neq z) \wedge \forall z (x \cdot y \geq z))$.
- Zanegować poniższe wyrażenia (tzn. zapisać ich negacje bez użycia symbolu negacji).
 - $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}) x < q < y)$;
 - $\exists x(x < 3 \vee \forall y(y > x \Rightarrow y \geq 3))$.
- Oceń prawdziwość poniższych zdań (warto zrozumieć ich znaczenie) i krótko uzasadnić odpowiedź.
 - $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) x = 2y$;
 - $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y$;
 - $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) x = 2y$;
 - $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) x = 2y$;
 - $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}) x = 2y$;
 - $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y$.

Zadania

- Zapisać formalnie poniższe zdania i funkcje zdaniowe. Poza zmiennymi i stałymi wolno używać **tylko** symboli logicznych, symboli równości, różności, nierówności, symboli operacji arytmetycznych oraz symboli należenia i zawierania.
 - Jeśli liczby rzeczywiste x i y są różne, to albo x jest mniejsze od y , albo y jest mniejsze od x .
 - Nie każda liczba parzysta jest podzielna przez 8.
 - Jeśli kwadrat liczby rzeczywistej x nie jest liczbą dodatnią, to x jest zerem.
 - Nie wszystkie liczby naturalne większe od 5 są nieparzyste.
 - Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma niepusty podzbiór właściwy.
 - Nie istnieje największa liczba rzeczywista.
 - Zbiór A ma dokładnie dwa elementy.
 - Zbiór A ma przynajmniej dwa elementy.
 - Zbiór A ma co najwyżej dwa elementy.

(j) Żaden element zbioru A , który nie jest elementem zbioru B , nie jest rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$.

(k) x jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych.

(l) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.

Które z tych wyrażeń są zdaniami? Które są prawdziwe?

6. Niech $D = \{1, 2, 7, 13, 19, 24\}$. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Podaj krótkie uzasadnienia.

(a) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in D)k \leq n$.

(b) $(\forall n \in D)(n > 3 \implies (\exists k \in \mathbb{N})n = 2k + 1)$.

7. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki:

- $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in A)k < n$,

- $(\forall n \in A)(\exists k \in A)k < n$.

8. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{Z}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki:

- $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall k \in \mathbb{Z})(n < k \implies k \in A)$,

- $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists k \in \mathbb{Z})(k < n \wedge k \notin A)$,

- $-100 \in A$.

9. Zapisz poniższe zdania i funkcje zdaniowe prozą, w języku potocznym.

(a) $(\forall x)x \notin A$

(b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)n \leq x$

(c) $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists m \in \mathbb{Z})m < n$

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x + y = y$

(e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})x + y = 0$

(f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0)$

(g) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0 \wedge x \neq y)$

(h) $(\exists n \in \mathbb{N})((\exists k \in \mathbb{N})n = 2k + 1 \wedge (\exists k \in \mathbb{N})n = 3k)$