Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista zadań nr 6 (na ćwiczenia 22.04.2024)

Ważna uwaga wstępna: należy zrozumieć różnicę pomiędzy zadaniem 5 z listy 5 a poniższymi zadaniami. W tamtym zadaniu mieliśmy wyrażenia będące zdaniami oraz funkcjami zdaniowymi niebędącymi zdaniami i należało rozróżniać te sytuacje. W szczególności niedopuszczalne było dopisywanie kwantyfikatora kwantyfikującego np. po x, gdy mieliśmy do czynienia z funkcją zdaniową zmiennej x.

Natomiast w zadaniach z tej listy mamy do czynienia z **twierdzeniami** (prawdziwymi bądź fałszywymi), co jest jasno zadeklarowane. Twierdzenie **zawsze** jest zdaniem. Jeżeli jego sformułowanie wygląda jak funkcja zdaniowa (pojawiają się zmienne, które wydają się być zmiennymi wolnymi), to oznacza, że na początku są domyślne kwantyfikatory ogólne – wszystkie zmienne wyglądające na wolne są kwantyfikowane ogólnie. Zatem np. *twierdzenie* „Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.” jest tożsame z *twierdzeniem* „Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $-x^2 + 2x - 1 < 10$.” (czego oczywiście nie moglibyśmy powiedzieć, gdybyśmy nie mieli tej dodatkowej informacji, że mamy do czynienia z twierdzeniami).

Krótki poradnik porządnego zapisywania dowodów:
• Określ dokładnie założenia i tezę.
• Przypomnij sobie definicje wszystkich pojęć występujących w sformułowaniu twierdzenia. Zastanów się, czy rozumiesz treść zadania.
• Przyjrzyj się uważnie tezie. Musisz zrozumieć, co jest celem dowodu.
• Pamiętaj, że dowód to nie same znaczki, tylko przede wszystkim opis rozumowania. Dowód powinien być zapisany zdaniami w języku polskim, znaczki pomagają różne treści zapisać w sposób zwarty i przejrzysty, ale nie zastępują opisu rozumowania, który jest kluczowy.
• Używaj prozy, np. takich wyrażeń jak „zatem”, „więc”, „czyli”, „z tego wynika, że”, „wówczas”, „w szczególności” itp. Ale uwaga: używaj ich świadomie! Jeżeli opisujesz przejścia równoważne, to używasz np. sformułowań „jest równoważne” bądź „dokładnie wtedy, gdy”, natomiast nie używasz „zatem”, „wówczas” czy „z tego wynika”, bo te sformułowania oznaczają jedynie wynikanie.
• Jeżeli w dowodzie pojawia się nowe oznaczenie, należy je wprowadzić (*każdy aktor wchodzący na scenę dowodu musi zostać przedstawiony*, jak mawiali klasycy). Jeżeli w dowodzie pojawia się x, to wcześniej trzeba napisać np. *Ustalmy dowolne* x (o ile takie jest znaczenie tego symbolu).
• Jeżeli komuś to pomaga, to można pisać kolejne kroki dowodu jeden pod drugim, pisząc wyraźnie, z czego aktualnie korzystamy (definicji, założenia, znanego faktu).
• Dowód powinien być zapisany zdaniami w języku polskim. Nie należy rozpoczynać zdania od symbolu/wzoru. Różne symbole/wzory powinny być oddzielone słowami.

Zadania

1. Udowodnij następujące twierdzenia, zapisując je wcześniej symbolicznie. Postaraj się przejrzyście sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia z sytuacją ogólną, czy szczegółową.

(a) Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.

(b) Jeżeli s i t są liczbami wymiernymi i $t \neq 0$, to liczba $\frac{s}{t}$ jest wymierna.

(c) Jeżeli a, b i c są liczbami całkowitymi oraz $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

(d) Jeżeli n i m są nieparzystymi liczbami naturalnymi, to $n \cdot m$ jest nieparzystą liczbą naturalną.

(e) Niech $x \in \mathbb{Z}$. Wtedy liczba $11x - 7$ jest nieparzysta dokładnie wtedy, gdy liczba x jest parzysta.

(f) Istnieje jedyna liczba całkowita x taka, że $x^2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}x$.

(g) Jeśli a, b, c są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $a + b + c$ jest podzielne przez 3.

2. Udowodnij lub obal poniższe twierdzenia (staraj się jednak nie wykonać obydwu poleceń naraz), zapisując je wcześniej symbolicznie. Postaraj się przejrzyście sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia z sytuacją ogólną, czy szczegółową.

(a) Niech A będzie zbiorem. Jeśli $A \cap B = \emptyset$ dla dowolnego zboru B, to $A = \emptyset$.

(b) Dla każdego niepustego zbioru A istnieje zbiór B taki, że $A \cup B = \emptyset$.

(c) Każda liczba całkowita nieparzysta jest sumą trzech liczb całkowitych nieparzystych.

(d) Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wtedy przynajmniej jedna z liczb $a + b, a + c$ i $b + c$ jest parzysta.

(e) Niech A, B, C będą zbiorami. Jeśli $A \setminus B = A \setminus C$, to $B = C$.

(f) Istnieją trzy różne liczby całkowite a, b, c takie, że $a^b = b^c$.

(g) Dla każdej liczby naturalnej x istnieje liczba naturalna y taka, że $x < y < x^2$.

(h) Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.

(i) Niech $x \in \mathbb{Z}$. Jeśli $3 \nmid (x^2 - 1)$, to $3 \mid x$.

(j) Dla każdej dodatniej liczby wymiernej b istnieje liczba niewymierna a taka, że $0 < a < b$.

3. Oceń poniższy dowód:
Twierdzenie: Każda parzysta liczba całkowita jest sumą dwóch nieparzystych liczb całkowitych.
Dowód: Załóżmy, że x i y są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Wówczas $x = 2k + 1$ i $y = 2l + 1$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$. Wobec tego $x + y = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1)$. Ponieważ $k+l+1$ jest liczbą całkowitą, więc liczba $x+y$ jest parzysta, co kończy dowód. □

4. Oceń poniższy dowód:
Twierdzenie: Jeśli x jest liczbą niewymierną, a y liczbą wymierną, to $z = x - y$ jest liczbą niewymierną.
Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że liczba $z = x - y$ jest wymierna. Wobec tego $z = \frac{a}{b}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, więc niech $x = \sqrt{2}$. Skoro $y \in \mathbb{Q}$, to $y = \frac{c}{d}$ dla pewnych $c, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Zatem

$$\sqrt{2} = x = y + z = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Ponieważ $ad + bc$ i bd są liczbami całkowitymi i $bd \neq 0$, więc $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, sprzeczność. □

5. Rozważmy następujący dowód:

Dowód: Załóżmy, że n jest nieparzystą liczbą całkowitą. Wtedy $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$3n - 5 = 3(2k + 1) - 5 = 6k + 3 - 5 = 6k - 2 = 2(3k - 1).$$

Ponieważ liczba $3k - 1$ jest całkowita, więc liczba $3n - 5$ jest parzysta.

Które z poniższych stwierdzeń zostało dowiedzione?

(a) Liczba $3n - 5$ jest parzysta.

(b) Jeśli n jest nieparzystą liczbą całkowitą, to liczba $3n - 5$ jest parzysta.

(c) Niech n będzie liczbą całkowitą. Jeśli liczba $3n - 5$ jest parzysta, to liczba n jest nieparzysta.

(d) Niech n będzie liczbą całkowitą. Jeśli liczba $3n - 5$ jest nieparzysta, to liczba n jest parzysta.

6. Zrób rachunek sumienia i odpowiedz sobie, których z poniższych metod dowodzenia zdarzało Ci się używać? A może nadużywać?

- Przez zaprzeczenie założenia.
- Przez założenie tezy.
- Przez sprowadzenie na manowce.
- Przez rozważenie przypadków i zbagatelizowanie każdego z nich.
- Przez ogląd – *Jak widać...*
- Przez podobieństwo – *Coś mi to przypomina...*
- Przez autorytet – *Na pewno tak będzie.*
- Przez przymus – *To musi być prawdą.*
- Przez sztuciec – *A nuż wyjdzie.*
- Prawie nie wprost – zakładamy fałszywość tezy i niczego nie dostajemy.
- Psychodeliczna – przez nadużycie symboli.
- Harcerska – podchody dookoła dowodu.
- Aferalna – na początku założenie, w środku jakaś afera, na końcu teza.
- Ezoteryczna – *Intuicyjnie czujemy, że...*
- Jest dobrze, bo jest dobrze – zakładamy założenie, a ponieważ założenie jest prawdziwe, więc teza też.