

Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista zadań nr 7 (na ćwiczenia 29.04.2024)

Ćwiczenia

- Rozważmy funkcje $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i ciąg liczb rzeczywistych $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. Zapisz następujące zdania.
 - Funkcja f jest ograniczona.
 - Żadna wartość funkcji g nie jest miejscem zerowym funkcji f .
 - Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których funkcja g jest większa od funkcji f .
 - Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest monotoniczny.
 - Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$.
 - Nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest dodatnich.
 - Od pewnego miejsca ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący.
 - Każdy wyraz ciągu $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest wartością funkcji f .
- Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz symbolicznie poniższe zbiory.
 - Zbiór miejsc zerowych funkcji f .
 - Zbiór okresów funkcji f . (Uwaga! Okres funkcji jest **dodatnią** liczbą rzeczywistą)
 - Zbiór ograniczeń górnych funkcji f .
- Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Zapisz symbolicznie **negacje** poniższych zdań (bez użycia symbolu negacji \neg).
 - Liczba 4 jest największą wartością funkcji f .
 - Dla pewnych argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 4.
- Zdefiniuj (wzorem) dowolne dwie (różne) funkcje $f, g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\})$.
- Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = |x|$. Dla każdego z poniższych podpunktów wskaż (jakakolwiek) liczbę rzeczywistą t , dla której funkcja zdaniowa staje się zdaniem prawdziwym (lub zaznacz, że takiej nie ma). Podaj krótkie uzasadnienie (np. można opisać słownie znaczenie danych wyrażeń).
 - $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \neq t$
 - $\neg(\exists x \in \mathbb{R})(x \neq t \wedge f(x) = f(t))$
 - $(\exists x > 2) f(x) < t \wedge (\exists x < 10) f(t) < x$
 - $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) f(x) = f(y) > t$.

Zadania

- Dla podanych poniżej funkcji sprawdź, czy są różnowartościowe i czy są „na”. Postaraj się zrozumieć definicje funkcji zanim zaczniesz „rachować”. Odpowiedzi uzasadnij.
 - $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}; \quad f(n, k) = n + k;$
 - $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(n, k) = n^2 - k;$
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2; \quad f(n) = \langle 2n, -2n \rangle;$
 - $f : [0, 2\pi) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(\alpha, r) = \langle r \cos \alpha, r \sin \alpha \rangle;$
 - $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(n, k) = (n - 2)2^k;$
 - $f : (\mathbb{N}^+)^2 \rightarrow \mathbb{N}; \quad f(n, k) = (n - 1)(k + 1);$
 - $f : (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\})^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}); \quad f(A, B) = A \setminus B;$

- (h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}); \quad f(r) = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\};$
- (i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}); \quad f(A, n) = \{x \in \mathbb{Z} : x \in A \wedge x \leq n\};$
- (j) $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \quad F(\varphi)(n) = \varphi(2n).$

7. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która:

- (a) jest surjekcją, ale nie jest injekcją;
- (b) jest injekcją, a zbiór jej wartości jest ograniczony;
- (c) zbiór jej wartości jest nieograniczony, a każda wartość jest przyjmowana nieskończenie wiele razy;
- (d) $\text{rng}(f) = [0, 1)$, a każda wartość jest przyjmowana nieskończenie wiele razy.

Wskazówka: Jeżeli nie jesteś w stanie wymyślić wzoru, spróbuj najpierw narysować wykres funkcji o wymaganych własnościach.