

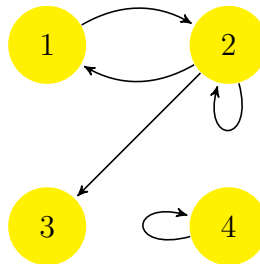
Wstęp do matematyki (lato 2025)

Lista zadań nr 12 (na ćwiczenia 27.05.2025 oraz 3.06.2025)

-4. Dla podanej relacji R na zbiorze X sprawdź, czy jest zwrotna, przeciwzwrotna, przechodnia, symetryczna, słabo antysymetryczna, spójna.

- (b) $X = \mathbb{R}$, $x R y \Leftrightarrow x \neq y$;
- (c) $X = (0, 2)$, $x R y \Leftrightarrow x \cdot y < 2$;
- (d) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A R B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
- (e) $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f R g \Leftrightarrow$ zbiór $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}$ jest skończony;
- (f) $X = \mathbb{N}^2$, $\langle x, y \rangle R \langle a, b \rangle \Leftrightarrow 2 \mid (x - a) \wedge y < b$.

-3. Uzasadnij podając odpowiednie kontrprzykłady, że relacja R na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4\}$ opisana grafem



nie jest zwrotna, nie jest przeciwzwrotna, nie jest przechodnia, nie jest symetryczna, nie jest słabo antysymetryczna, nie jest spójna.

-2. Dla relacji opisanej w zadaniu 4 wyznacz poniższe zbiory:

- (a) $\{x \in X : (\forall y \in X)(y R x \Rightarrow x R y)\}$,
- (b) $\{x \in X : (\exists y \in X)(x R y \wedge \neg y R x)\}$.

-1. Czy każda relacja symetryczna i przechodnia na zbiorze $\mathbb{N}$ jest zwrotna? Odpowiedź uzasadnij.

1. Dla podanych zbiorów X i relacji R na X uzasadnij, że R **nie jest** relacją równoważności.

- (a) $X = \mathbb{Z}$; $x R y \Leftrightarrow 3 \mid (x + y)$,
- (b) $X = \mathbb{R}$; $x R y \Leftrightarrow x - y > 1$,
- (c) $X = \mathbb{R}$; $x R y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$,
- (d) $X = \mathbb{R}^2$; $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 = y_2$,
- (e) $X = \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$; $A R B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$,
- (f) $X = \mathbb{Z}$; $x R y \Leftrightarrow x < 3 + y$.

2. Dla podanych zbiorów X i relacji R na X uzasadnij, że R **jest** relacją równoważności. Postaraj się zrozumieć, według jakiej zasady relacja R „grupuje” elementy zbioru X .

- (a) $X = \mathbb{Z}$; $x R y \Leftrightarrow 2 \mid (x + y)$,
- (b) $X = \mathbb{R}^2$; $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
- (c) $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| \leq 4\}$; $x R y \Leftrightarrow xy > 0$.
- (d) $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$; $A R B \Leftrightarrow A \cap \{1, 4\} = B \cap \{1, 4\}$.

3. Podaj przykład relacji równoważności R na zbiorze $\mathbb{N}$, spełniającej wszystkie poniższe warunki:

- $1 R 2$
- $\neg(2 R 3)$
- relacja R ma trzy klasy abstrakcji.

4. Dla podanych zbiorów X i relacji równoważności R na X wyznacz zbiór ilorazowy X/R .

- (a) $X = \mathbb{N}^+$; $x R y \Leftrightarrow 2 \mid (x + y)$,
- (b) $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| \leq 4\}$; $x R y \Leftrightarrow xy > 0$.

5. Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(y).$$

- (a) Wyznacz $[0]_R$.
- (b) Wyznacz $[1]_R$. Sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz tę klasę abstrakcji jeszcze raz, tym razem poprawnie.
- (c) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{R}/_R$.

6. Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- (a) Wyznacz i narysuj klasy abstrakcji $[\langle 0, 0 \rangle]_R, [\langle 1, 1 \rangle]_R$.
- (b) Jak wygląda podział płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zadany przez relację R (czyli zbiór ilorazowy tej relacji)? Opisz go.

7. Na zbiorze $\mathbb{N}^2$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$\langle n_1, m_1 \rangle R \langle n_2, m_2 \rangle \Leftrightarrow 2|(n_1 + n_2) \wedge 2|(n_1 + m_1 + n_2 + m_2).$$

- (a) Wyznacz $[\langle 0, 1 \rangle]_R$.
- (b) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^2/_R$.

Wskazówka: Pomyśl, jak uprościć definicję relacji R . Skorzystaj z zadania 2(a).

8. Na zbiorze $X = [0, 10]$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow [x, x+1] \cap \mathbb{N} = [y, y+1] \cap \mathbb{N}.$$

- (a) Wyznacz $[3]_R$.
- (b) Wyznacz $\left[\frac{3}{2}\right]_R$.
- (c) Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.

9. Niech $X = \{x \in \mathbb{Z} : |x+1| \leq 5\}$ i niech funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sin(\frac{x\pi}{2})$. Rozważmy relację równoważności R na X zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

- (a) Wyznacz $[3]_R$.
- (b) Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.

10. Na zbiorze $\mathbb{N}$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow 5 \mid (x^2 - y^2).$$

- (a) Wyznacz $[3]_R$.
- (b) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}/_R$.

11. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}^+ : n \leq 6\}$. Niech funkcja $f : X \rightarrow X$ będzie dana wzorem $f(x) = \lceil \sqrt{3x} \rceil$, gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $x \in \mathbb{R}$. Na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ definiujemy relację równoważności R warunkiem

$$A R B \Leftrightarrow f[A] = f[B].$$

- (a) Wyznacz $[\emptyset]_R$.
- (b) Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(X)/_R$? Odpowiedź uzasadnij (uzasadnienie nie musi polegać na wyznaczeniu tego zbioru ilorazowego).

12. Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$A R B \Leftrightarrow (\mathbb{N} \subseteq A \Leftrightarrow \mathbb{N} \subseteq B).$$

- (a) Czy $\{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\} \in [\emptyset]_R$?
- (b) Czy $[\mathbb{N}]_R = [\mathbb{Z}]_R$?
- (c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R$?

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.