Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista przygotowawcza przed kolokwium nr 1

Zadania

0. Upewnij się, że znasz (i rozumiesz) wszystkie definicje związane z tym fragmentem materiału.

1. O czterech różnych liczbach rzeczywistych a, b, c, d wiemy, że
(i) jeśli a jest mniejsza od b, to c jest mniejsza od d,
(ii) większa z liczb b, d jest mniejsza od większej z liczb a, c.
Czy stąd wynika, że $a < b$? Czy wynika, że $c > d$? Odpowiedzi uzasadnij.

2. Mamy dane dwie funkcje zdaniowe o zakresie zmienności $x \in \mathbb{N}$:
$\varphi(x) = x$ **nie jest podzielne przez 5.** $\psi(x) = x$ **jest liczbą parzystą.**
(i) Zapisz za pomocą $\varphi(x), \psi(x)$ i spójników logicznych funkcję zdaniową
$\alpha(x) = x$ **jest liczbą nieparzystą lub nieprawdą jest, że z faktu iż** x **jest liczbą parzystą wynika, że** x **jest podzielne przez 5.**
(ii) Podaj, dla których liczb naturalnych x należących do zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 13\}$ funkcja zdaniowa $\alpha(x)$ **nie jest** prawdziwa. Odpowiedź uzasadnij.

3. Zapisz poniższe zbiory stosując opis zbioru za pomocą **funkcji zdaniowej**:
(a) Zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
(b) Zbiór wszystkich par uporządkowanych liczb całkowitych, których obie współrzędne są tej samej parzystości.
(c) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących do którejś z osi współrzędnych.
(d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadanej wzorem $f(x) = x^2$.
(e) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, do których należy liczba 17.
(f) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych o dodatnim wyrazie wolnym.
(g) Zbiór wszystkich symetrycznych macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych (zbiór macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych oznaczamy jako $\mathcal{M}_{2\times 2}[\mathbb{R}]$).

4. Zapisz poniższe zbiory stosując opis zbioru za pomocą **operacji** oraz (być może) operację **sumy** zbiorów:
(a) Zbiór wszystkich parzystych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.
(b) Zbiór wszystkich par uporządkowanych liczb całkowitych, których obie współrzędne są nieparzyste.
(c) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących do którejś z osi współrzędnych.
(d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, należących wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadanej wzorem $f(x) = x^2$.
(e) Zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych stopnia co najwyżej 2.

5. Które z poniższych stwierdzeń **mogą być** prawdziwe dla pewnych zbiorów A i B? Odpowiedź uzasadnij.

(a) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$;

(b) $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \in \mathcal{P}(A) \times A$;

(c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \ \wedge \ B \cap A \neq \emptyset$.

6. Mamy dane zbiory
$A = \{x^2 - 1 : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 3)$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} : x > -2 \ \wedge \neg\, x^2 \geqslant 4\}$.
Wyznacz zbiór $\Big(\mathcal{P}(A) \triangle (\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\})\Big) \times (B \setminus A)$.

7. Mamy dane zbiory
$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \ \wedge \ x^2 < 33\}$,
$B = \{x^2 + x : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 6)$.
Wyznacz zbiór $P(((B \triangle A) \times B) \setminus (A \times (-1, 1])) \setminus \{\{\emptyset\}\}$.

8. Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{0, 2, 4\}, B = \{2, 3, 5\}$. Wypisz wszystkie zbiory $U \subseteq X$, które spełniają łącznie następujące warunki:

- nie są rozłączne ze zbiorem A,
- są rozłączne ze zbiorem B,
- nie zawierają się w zbiorze A.

9. Dane są zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zapisz funkcję zdaniową $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \setminus (B \times A)$ za pomocą funkcji zdaniowych $x \in A, x \in B, y \in A, y \in B$, spójników logicznych i nawiasów.

(b) Określ zbiory $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $(A \times B) \setminus (B \times A) = (U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$.