Test kwalifikacyjny Wersja testu **A** 30 września 2015 r.

1. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=20, \quad q=\mathbf{25}$

b) $p=50, \quad q=\mathbf{100}$

c) $p=60, \quad q=\mathbf{150}$

d) $p=75, \quad q=\mathbf{300}$

2. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=99, \quad q=\mathbf{9900}$

b) $p=95, \quad q=\mathbf{1900}$

c) $p=90, \quad q=\mathbf{900}$

d) $p=80, \quad q=\mathbf{400}$

3. Liczbę naturalną n nazwiemy *szczęśliwą*, jeżeli istnieją takie dwa trójkąty równoboczne o bokach długości całkowitej, że jeden trójkąt ma pole większe o $n\%$ od pola drugiego trójkąta. Dla podanej liczby k podać najmniejszą *szczęśliwą* liczbę n większą od k.

a) $k=25, \quad n=\mathbf{44}$

b) $k=10, \quad n=\mathbf{21}$

c) $k=100, \quad n=\mathbf{125}$

d) $k=50, \quad n=\mathbf{69}$

4. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(x-5)^5 > 32$, $\quad \mathbf{(7, +\infty)}$

b) $(x-2)^2 < 4$, $\quad \mathbf{(0, 4)}$

c) $(x-3)^3 < 8$, $\quad \mathbf{(-\infty, 5)}$

d) $(x-4)^4 > 16$, $\quad \mathbf{(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)}$

5. Podać liczbę rzeczywistą x spełniającą dane równanie.

a) $\log_2 3 = \log_4 x$ dla $x = \mathbf{9}$

b) $\log_{81} 4 = \log_3 x$ dla $x = \sqrt{\mathbf{2}}$

c) $\log_4 8 = \log_9 x$ dla $x = \mathbf{27}$

d) $\log_8 27 = \log_{16} x$ dla $x = \mathbf{81}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_4 x > 1/2$, $\quad \mathbf{(2, +\infty)}$

b) $\log_4 x > 1/4$, $\quad \mathbf{(\sqrt{2}, +\infty)}$

c) $\log_4 x < 2$, $\quad \mathbf{(0, 16)}$

d) $\log_4 x < -1/2$, $\quad \mathbf{(0, 1/2)}$

7. Podać najmniejszą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=x^2-2x$, $\mathbf{-1}$

b) $f(x)=x^4-4x^2$, $\mathbf{-4}$

c) $f(x)=x^8+8x^4$, $\mathbf{0}$

d) $f(x)=x^6+6x^3$, $\mathbf{-9}$

8. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik.

a) $1\,000\,000\,075$, **25**

b) $1\,000\,000\,062$, **18**

c) $1\,000\,000\,308$, **12**

d) $1\,000\,000\,005$, **15**

9. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $40^{14}-13^{14}$, **53**

b) $40^{13}+3^{13}$, **43**

c) $40^{11}-3^{11}$, **37**

d) $40^{14}-9^{14}$, **31**

10. Wśród dowolnych n kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieją dwie liczby, których największy wspólny dzielnik jest równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=20$, $k=\mathbf{10}$

b) $n=15$, $k=\mathbf{7}$

c) $n=5$, $k=\mathbf{2}$

d) $n=10$, $k=\mathbf{5}$

11. Istnieje takich n kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że pewne dwie spośród nich mają największy wspólny dzielnik równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=20$, $k=\mathbf{19}$

b) $n=5$, $k=\mathbf{4}$

c) $n=10$, $k=\mathbf{9}$

d) $n=15$, $k=\mathbf{14}$

12. Postęp geometryczny o wyrazach całkowitych dodatnich składa się z co najmniej trzech wyrazów. Jego pierwszy i ostatni wyraz są podane. Podać liczbę wyrazów tego postępu.

a) 2, 64, **6**

b) 24, 81, **4**

c) 25, 36, **3**

d) 1, 128, **8**

13. Liczbę naturalną n nazwiemy *fajną*, jeśli suma dowolnego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o wyrazach całkowitych jest podzielna przez n. Podać liczbę *fajnych* liczb n spełniających podaną nierówność.

a) $333 < n < 433$, **49**

b) $777 < n < 977$, **99**

c) $100 < n < 200$, **50**

d) $500 < n < 700$, **100**

14. Dla podanej liczby naturalnej n podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_6A_5$, gdzie $A_1A_2A_3\ldots A_n$ jest n-kątem foremnym.

a) $n = 72$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{10}^\circ$

b) $n = 10$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{72}^\circ$

c) $n = 40$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{18}^\circ$

d) $n = 18$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{40}^\circ$

15. Niech $A_1A_2A_3\ldots A_n$ oznacza n-kąt foremny. Wskazać liczbę naturalną n, dla której miara podanego kąta jest równa n°. Aby zadanie miało sens, liczba n musi spełniać podaną nierówność.

a) $n \geqslant 10$, $\sphericalangle A_1A_{10}A_6 = n^\circ$ dla $n = \mathbf{30}$

b) $n \geqslant 82$, $\sphericalangle A_1A_{82}A_{81} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{120}$

c) $n \geqslant 24$, $\sphericalangle A_1A_{24}A_{21} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{60}$

d) $n \geqslant 48$, $\sphericalangle A_1A_{48}A_{46} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{90}$

16. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a, b i c.

a) $a=3,\quad b=5,\quad c\in\{\,\mathbf{4},\ \sqrt{\mathbf{34}}\,\}$

b) $a=2,\quad b=3,\quad c\in\{\,\sqrt{\mathbf{5}},\ \sqrt{\mathbf{13}}\,\}$

c) $a=1,\quad b=2,\quad c\in\{\,\sqrt{\mathbf{3}},\ \sqrt{\mathbf{5}}\,\}$

d) $a=3,\quad b=4,\quad c\in\{\,\sqrt{\mathbf{7}},\ \mathbf{5}\,\}$

17. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $120°$.

a) $a=1,\quad b=2,\quad c=\sqrt{\mathbf{7}}$

b) $a=3,\quad b=4,\quad c=\sqrt{\mathbf{37}}$

c) $a=3,\quad b=5,\quad c=\mathbf{7}$

d) $a=2,\quad b=3,\quad c=\sqrt{\mathbf{19}}$

18. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $60°$.

a) $a=3,\quad b=4,\quad c=\sqrt{\mathbf{13}}$

b) $a=2,\quad b=3,\quad c=\sqrt{\mathbf{7}}$

c) $a=3,\quad b=5,\quad c=\sqrt{\mathbf{19}}$

d) $a=1,\quad b=2,\quad c=\sqrt{\mathbf{3}}$

19. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną n większą od k, że

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

a) $k=100$, $n=\mathbf{301}$

b) $k=33$, $n=\mathbf{100}$

c) $k=22$, $n=\mathbf{67}$

d) $k=11$, $n=\mathbf{34}$

20. Wskazać takie liczby naturalne a i b większe od 1, że podana liczba jest równa $2^{2^{a^b}}$.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $x^{y^z}=x^{(y^z)}$.

a) $\left(2^{2^{5^2}}\right)^4$, $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{3}$

b) $\left(2^{2^{2^5}}\right)^{16}$, $a=\mathbf{6}$, $b=\mathbf{2}$

c) $\left(2^{2^{2^3}}\right)^2$, $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{2}$

d) $\left(2^{2^{5^3}}\right)^8$, $a=\mathbf{2}$, $b=\mathbf{7}$

Test kwalifikacyjny Wersja testu **B** 30 września 2015 r.

1. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=60, \quad q=\mathbf{150}$

b) $p=50, \quad q=\mathbf{100}$

c) $p=20, \quad q=\mathbf{25}$

d) $p=75, \quad q=\mathbf{300}$

2. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=80, \quad q=\mathbf{400}$

b) $p=90, \quad q=\mathbf{900}$

c) $p=99, \quad q=\mathbf{9900}$

d) $p=95, \quad q=\mathbf{1900}$

3. Liczbę naturalną n nazwiemy *szczęśliwą*, jeżeli istnieją takie dwa trójkąty równoboczne o bokach długości całkowitej, że jeden trójkąt ma pole większe o $n\%$ od pola drugiego trójkąta. Dla podanej liczby k podać najmniejszą *szczęśliwą* liczbę n większą od k.

a) $k=100, \quad n=\mathbf{125}$

b) $k=25, \quad n=\mathbf{44}$

c) $k=10, \quad n=\mathbf{21}$

d) $k=50, \quad n=\mathbf{69}$

4. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(x-5)^5 > 32$, $\quad (\mathbf{7}, +\infty)$

b) $(x-4)^4 > 16$, $\quad (-\infty, \mathbf{2}) \cup (\mathbf{6}, +\infty)$

c) $(x-3)^3 < 8$, $\quad (-\infty, \mathbf{5})$

d) $(x-2)^2 < 4$, $\quad (\mathbf{0}, \mathbf{4})$

5. Podać liczbę rzeczywistą x spełniającą dane równanie.

a) $\log_8 27 = \log_{16} x$ dla $x = \mathbf{81}$

b) $\log_{81} 4 = \log_3 x$ dla $x = \sqrt{\mathbf{2}}$

c) $\log_4 8 = \log_9 x$ dla $x = \mathbf{27}$

d) $\log_2 3 = \log_4 x$ dla $x = \mathbf{9}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_4 x > 1/4$, $\quad (\sqrt{\mathbf{2}}, +\infty)$

b) $\log_4 x < -1/2$, $\quad (\mathbf{0}, \mathbf{1/2})$

c) $\log_4 x > 1/2$, $\quad (\mathbf{2}, +\infty)$

d) $\log_4 x < 2$, $\quad (\mathbf{0}, \mathbf{16})$

7. Podać najmniejszą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=x^2-2x$, $\mathbf{-1}$

b) $f(x)=x^4-4x^2$, $\mathbf{-4}$

c) $f(x)=x^6+6x^3$, $\mathbf{-9}$

d) $f(x)=x^8+8x^4$, $\mathbf{0}$

8. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik.

a) $1\,000\,000\,005$, **15**

b) $1\,000\,000\,062$, **18**

c) $1\,000\,000\,308$, **12**

d) $1\,000\,000\,075$, **25**

9. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $40^{13}+3^{13}$, **43**

b) $40^{14}-9^{14}$, **31**

c) $40^{11}-3^{11}$, **37**

d) $40^{14}-13^{14}$, **53**

10. Wśród dowolnych n kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieją dwie liczby, których największy wspólny dzielnik jest równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=10$, $k=\mathbf{5}$

b) $n=20$, $k=\mathbf{10}$

c) $n=15$, $k=\mathbf{7}$

d) $n=5$, $k=\mathbf{2}$

11. Istnieje takich n kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że pewne dwie spośród nich mają największy wspólny dzielnik równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=15$, $k=\mathbf{14}$

b) $n=20$, $k=\mathbf{19}$

c) $n=10$, $k=\mathbf{9}$

d) $n=5$, $k=\mathbf{4}$

12. Postęp geometryczny o wyrazach całkowitych dodatnich składa się z co najmniej trzech wyrazów. Jego pierwszy i ostatni wyraz są podane. Podać liczbę wyrazów tego postępu.

a) 2, 64, **6**

b) 24, 81, **4**

c) 1, 128, **8**

d) 25, 36, **3**

13. Liczbę naturalną n nazwiemy *fajną*, jeśli suma dowolnego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o wyrazach całkowitych jest podzielna przez n. Podać liczbę *fajnych* liczb n spełniających podaną nierówność.

a) $777 < n < 977$, **99**

b) $333 < n < 433$, **49**

c) $500 < n < 700$, **100**

d) $100 < n < 200$, **50**

14. Dla podanej liczby naturalnej n podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_6A_5$, gdzie $A_1A_2A_3\ldots A_n$ jest n-kątem foremnym.

a) $n = 10$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{72}^\circ$

b) $n = 72$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{10}^\circ$

c) $n = 40$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{18}^\circ$

d) $n = 18$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{40}^\circ$

15. Niech $A_1A_2A_3\ldots A_n$ oznacza n-kąt foremny. Wskazać liczbę naturalną n, dla której miara podanego kąta jest równa n°. Aby zadanie miało sens, liczba n musi spełniać podaną nierówność.

a) $n \geqslant 24$, $\sphericalangle A_1A_{24}A_{21} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{60}$

b) $n \geqslant 48$, $\sphericalangle A_1A_{48}A_{46} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{90}$

c) $n \geqslant 10$, $\sphericalangle A_1A_{10}A_6 = n^\circ$ dla $n = \mathbf{30}$

d) $n \geqslant 82$, $\sphericalangle A_1A_{82}A_{81} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{120}$

16. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a, b i c.

a) $a=3, \quad b=4, \quad c \in \{\,\mathbf{\sqrt{7},\ 5}\,\}$

b) $a=3, \quad b=5, \quad c \in \{\,\mathbf{4,\ \sqrt{34}}\,\}$

c) $a=1, \quad b=2, \quad c \in \{\,\mathbf{\sqrt{3},\ \sqrt{5}}\,\}$

d) $a=2, \quad b=3, \quad c \in \{\,\mathbf{\sqrt{5},\ \sqrt{13}}\,\}$

17. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $120°$.

a) $a=3, \quad b=5, \quad c=\mathbf{7}$

b) $a=3, \quad b=4, \quad c=\mathbf{\sqrt{37}}$

c) $a=2, \quad b=3, \quad c=\mathbf{\sqrt{19}}$

d) $a=1, \quad b=2, \quad c=\mathbf{\sqrt{7}}$

18. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $60°$.

a) $a=2, \quad b=3, \quad c=\mathbf{\sqrt{7}}$

b) $a=3, \quad b=4, \quad c=\mathbf{\sqrt{13}}$

c) $a=3, \quad b=5, \quad c=\mathbf{\sqrt{19}}$

d) $a=1, \quad b=2, \quad c=\mathbf{\sqrt{3}}$

19. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną n większą od k, że

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

a) $k=22$, $n=\mathbf{67}$

b) $k=11$, $n=\mathbf{34}$

c) $k=33$, $n=\mathbf{100}$

d) $k=100$, $n=\mathbf{301}$

20. Wskazać takie liczby naturalne a i b większe od 1, że podana liczba jest równa $2^{2^{a^b}}$.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $x^{y^z}=x^{(y^z)}$.

a) $\left(2^{2^{2^3}}\right)^2$, $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{2}$

b) $\left(2^{2^{5^3}}\right)^8$, $a=\mathbf{2}$, $b=\mathbf{7}$

c) $\left(2^{2^{2^5}}\right)^{16}$, $a=\mathbf{6}$, $b=\mathbf{2}$

d) $\left(2^{2^{5^2}}\right)^4$, $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{3}$

Test kwalifikacyjny Wersja testu **C** 30 września 2015 r.

1. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=60$, $q=\mathbf{150}$

b) $p=20$, $q=\mathbf{25}$

c) $p=75$, $q=\mathbf{300}$

d) $p=50$, $q=\mathbf{100}$

2. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=99$, $q=\mathbf{9900}$

b) $p=90$, $q=\mathbf{900}$

c) $p=80$, $q=\mathbf{400}$

d) $p=95$, $q=\mathbf{1900}$

3. Liczbę naturalną n nazwiemy *szczęśliwą*, jeżeli istnieją takie dwa trójkąty równoboczne o bokach długości całkowitej, że jeden trójkąt ma pole większe o $n\%$ od pola drugiego trójkąta. Dla podanej liczby k podać najmniejszą *szczęśliwą* liczbę n większą od k.

a) $k=10$, $n=\mathbf{21}$

b) $k=25$, $n=\mathbf{44}$

c) $k=100$, $n=\mathbf{125}$

d) $k=50$, $n=\mathbf{69}$

4. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(x-5)^5 > 32$, $\mathbf{(7, +\infty)}$

b) $(x-3)^3 < 8$, $\mathbf{(-\infty, 5)}$

c) $(x-4)^4 > 16$, $\mathbf{(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)}$

d) $(x-2)^2 < 4$, $\mathbf{(0, 4)}$

5. Podać liczbę rzeczywistą x spełniającą dane równanie.

a) $\log_4 8 = \log_9 x$ dla $x = \mathbf{27}$

b) $\log_2 3 = \log_4 x$ dla $x = \mathbf{9}$

c) $\log_8 27 = \log_{16} x$ dla $x = \mathbf{81}$

d) $\log_{81} 4 = \log_3 x$ dla $x = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_4 x > 1/4$, $\mathbf{(\sqrt{2}, +\infty)}$

b) $\log_4 x < -1/2$, $\mathbf{(0, 1/2)}$

c) $\log_4 x > 1/2$, $\mathbf{(2, +\infty)}$

d) $\log_4 x < 2$, $\mathbf{(0, 16)}$

7. Podać najmniejszą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=x^4-4x^2$, $\mathbf{-4}$

b) $f(x)=x^6+6x^3$, $\mathbf{-9}$

c) $f(x)=x^2-2x$, $\mathbf{-1}$

d) $f(x)=x^8+8x^4$, $\mathbf{0}$

8. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik.

a) $1\,000\,000\,075$, **25**

b) $1\,000\,000\,062$, **18**

c) $1\,000\,000\,308$, **12**

d) $1\,000\,000\,005$, **15**

9. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $40^{13}+3^{13}$, **43**

b) $40^{14}-13^{14}$, **53**

c) $40^{11}-3^{11}$, **37**

d) $40^{14}-9^{14}$, **31**

10. Wśród dowolnych n kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieją dwie liczby, których największy wspólny dzielnik jest równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=5$, $k=\mathbf{2}$

b) $n=20$, $k=\mathbf{10}$

c) $n=15$, $k=\mathbf{7}$

d) $n=10$, $k=\mathbf{5}$

11. Istnieje takich n kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że pewne dwie spośród nich mają największy wspólny dzielnik równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=20$, $k=\mathbf{19}$

b) $n=10$, $k=\mathbf{9}$

c) $n=5$, $k=\mathbf{4}$

d) $n=15$, $k=\mathbf{14}$

12. Postęp geometryczny o wyrazach całkowitych dodatnich składa się z co najmniej trzech wyrazów. Jego pierwszy i ostatni wyraz są podane. Podać liczbę wyrazów tego postępu.

a) 24, 81, **4**

b) 25, 36, **3**

c) 1, 128, **8**

d) 2, 64, **6**

13. Liczbę naturalną n nazwiemy *fajną*, jeśli suma dowolnego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o wyrazach całkowitych jest podzielna przez n. Podać liczbę *fajnych* liczb n spełniających podaną nierówność.

a) $100 < n < 200$, **50**

b) $500 < n < 700$, **100**

c) $333 < n < 433$, **49**

d) $777 < n < 977$, **99**

14. Dla podanej liczby naturalnej n podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_6A_5$, gdzie $A_1A_2A_3\ldots A_n$ jest n-kątem foremnym.

a) $n = 72$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{10}^\circ$

b) $n = 18$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{40}^\circ$

c) $n = 40$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{18}^\circ$

d) $n = 10$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{72}^\circ$

15. Niech $A_1A_2A_3\ldots A_n$ oznacza n-kąt foremny. Wskazać liczbę naturalną n, dla której miara podanego kąta jest równa n°. Aby zadanie miało sens, liczba n musi spełniać podaną nierówność.

a) $n \geqslant 24$, $\sphericalangle A_1A_{24}A_{21} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{60}$

b) $n \geqslant 82$, $\sphericalangle A_1A_{82}A_{81} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{120}$

c) $n \geqslant 10$, $\sphericalangle A_1A_{10}A_6 = n^\circ$ dla $n = \mathbf{30}$

d) $n \geqslant 48$, $\sphericalangle A_1A_{48}A_{46} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{90}$

16. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a, b i c.

a) $a=3$, $b=4$, $c\in\{\,\boldsymbol{\sqrt{7},\ 5}\,\}$

b) $a=2$, $b=3$, $c\in\{\,\boldsymbol{\sqrt{5},\ \sqrt{13}}\,\}$

c) $a=3$, $b=5$, $c\in\{\,\boldsymbol{4,\ \sqrt{34}}\,\}$

d) $a=1$, $b=2$, $c\in\{\,\boldsymbol{\sqrt{3},\ \sqrt{5}}\,\}$

17. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $120°$.

a) $a=2$, $b=3$, $c=\boldsymbol{\sqrt{19}}$

b) $a=3$, $b=5$, $c=\boldsymbol{7}$

c) $a=1$, $b=2$, $c=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

d) $a=3$, $b=4$, $c=\boldsymbol{\sqrt{37}}$

18. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $60°$.

a) $a=3$, $b=5$, $c=\boldsymbol{\sqrt{19}}$

b) $a=3$, $b=4$, $c=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

c) $a=2$, $b=3$, $c=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

d) $a=1$, $b=2$, $c=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

19. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną n większą od k, że

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

a) $k = 33, \quad n = \mathbf{100}$

b) $k = 11, \quad n = \mathbf{34}$

c) $k = 100, \quad n = \mathbf{301}$

d) $k = 22, \quad n = \mathbf{67}$

20. Wskazać takie liczby naturalne a i b większe od 1, że podana liczba jest równa $2^{2^{a^b}}$.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.

a) $\left(2^{2^{5^3}}\right)^8, \quad a = \mathbf{2}, \quad b = \mathbf{7}$

b) $\left(2^{2^{2^5}}\right)^{16}, \quad a = \mathbf{6}, \quad b = \mathbf{2}$

c) $\left(2^{2^{2^3}}\right)^2, \quad a = \mathbf{3}, \quad b = \mathbf{2}$

d) $\left(2^{2^{5^2}}\right)^4, \quad a = \mathbf{3}, \quad b = \mathbf{3}$

Test kwalifikacyjny Wersja testu **D** 30 września 2015 r.

1. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o p%, to liczba b jest większa od liczby a o q%.

a) $p = 20$, $q = \mathbf{25}$

b) $p = 75$, $q = \mathbf{300}$

c) $p = 50$, $q = \mathbf{100}$

d) $p = 60$, $q = \mathbf{150}$

2. Dla podanej liczby p podać liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o p%, to liczba b jest większa od liczby a o q%.

a) $p = 99$, $q = \mathbf{9900}$

b) $p = 80$, $q = \mathbf{400}$

c) $p = 95$, $q = \mathbf{1900}$

d) $p = 90$, $q = \mathbf{900}$

3. Liczbę naturalną n nazwiemy *szczęśliwą*, jeżeli istnieją takie dwa trójkąty równoboczne o bokach długości całkowitej, że jeden trójkąt ma pole większe o n% od pola drugiego trójkąta. Dla podanej liczby k podać najmniejszą *szczęśliwą* liczbę n większą od k.

a) $k = 100$, $n = \mathbf{125}$

b) $k = 25$, $n = \mathbf{44}$

c) $k = 50$, $n = \mathbf{69}$

d) $k = 10$, $n = \mathbf{21}$

4. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(x-5)^5 > 32$, $\quad (\mathbf{7}, +\infty)$

b) $(x-4)^4 > 16$, $\quad (-\infty, \mathbf{2}) \cup (\mathbf{6}, +\infty)$

c) $(x-2)^2 < 4$, $\quad (\mathbf{0}, \mathbf{4})$

d) $(x-3)^3 < 8$, $\quad (-\infty, \mathbf{5})$

5. Podać liczbę rzeczywistą x spełniającą dane równanie.

a) $\log_4 8 = \log_9 x$ dla $x = \mathbf{27}$

b) $\log_2 3 = \log_4 x$ dla $x = \mathbf{9}$

c) $\log_{81} 4 = \log_3 x$ dla $x = \sqrt{\mathbf{2}}$

d) $\log_8 27 = \log_{16} x$ dla $x = \mathbf{81}$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_4 x > 1/4$, $\quad (\sqrt{\mathbf{2}}, +\infty)$

b) $\log_4 x < -1/2$, $\quad (\mathbf{0}, \mathbf{1/2})$

c) $\log_4 x > 1/2$, $\quad (\mathbf{2}, +\infty)$

d) $\log_4 x < 2$, $\quad (\mathbf{0}, \mathbf{16})$

7. Podać najmniejszą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=x^8+8x^4$, **0**

b) $f(x)=x^4-4x^2$, $\mathbf{-4}$

c) $f(x)=x^6+6x^3$, $\mathbf{-9}$

d) $f(x)=x^2-2x$, $\mathbf{-1}$

8. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik.

a) 1 000 000 075, **25**

b) 1 000 000 062, **18**

c) 1 000 000 308, **12**

d) 1 000 000 005, **15**

9. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $40^{14}-13^{14}$, **53**

b) $40^{11}-3^{11}$, **37**

c) $40^{13}+3^{13}$, **43**

d) $40^{14}-9^{14}$, **31**

10. Wśród dowolnych n kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieją dwie liczby, których największy wspólny dzielnik jest równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=10$, $k=\mathbf{5}$

b) $n=5$, $k=\mathbf{2}$

c) $n=20$, $k=\mathbf{10}$

d) $n=15$, $k=\mathbf{7}$

11. Istnieje takich n kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że pewne dwie spośród nich mają największy wspólny dzielnik równy k. Dla podanej liczby n podać największą liczbę naturalną k, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $n=20$, $k=\mathbf{19}$

b) $n=15$, $k=\mathbf{14}$

c) $n=5$, $k=\mathbf{4}$

d) $n=10$, $k=\mathbf{9}$

12. Postęp geometryczny o wyrazach całkowitych dodatnich składa się z co najmniej trzech wyrazów. Jego pierwszy i ostatni wyraz są podane. Podać liczbę wyrazów tego postępu.

a) 25, 36, **3**

b) 24, 81, **4**

c) 2, 64, **6**

d) 1, 128, **8**

13. Liczbę naturalną n nazwiemy *fajną*, jeśli suma dowolnego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o wyrazach całkowitych jest podzielna przez n. Podać liczbę *fajnych* liczb n spełniających podaną nierówność.

a) $500 < n < 700$, **100**

b) $333 < n < 433$, **49**

c) $777 < n < 977$, **99**

d) $100 < n < 200$, **50**

14. Dla podanej liczby naturalnej n podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_6A_5$, gdzie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ jest n-kątem foremnym.

a) $n = 40$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{18}^\circ$

b) $n = 18$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{40}^\circ$

c) $n = 10$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{72}^\circ$

d) $n = 72$, $\sphericalangle A_1A_6A_5 = \mathbf{10}^\circ$

15. Niech $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ oznacza n-kąt foremny. Wskazać liczbę naturalną n, dla której miara podanego kąta jest równa n°. Aby zadanie miało sens, liczba n musi spełniać podaną nierówność.

a) $n \geqslant 48$, $\sphericalangle A_1A_{48}A_{46} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{90}$

b) $n \geqslant 82$, $\sphericalangle A_1A_{82}A_{81} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{120}$

c) $n \geqslant 10$, $\sphericalangle A_1A_{10}A_6 = n^\circ$ dla $n = \mathbf{30}$

d) $n \geqslant 24$, $\sphericalangle A_1A_{24}A_{21} = n^\circ$ dla $n = \mathbf{60}$

16. Dla podanych liczb a i b podać zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a, b i c.

a) $a=1$, $b=2$, $c\in\{\,\mathbf{\sqrt{3},\ \sqrt{5}}\,\}$

b) $a=3$, $b=5$, $c\in\{\,\mathbf{4,\ \sqrt{34}}\,\}$

c) $a=3$, $b=4$, $c\in\{\,\mathbf{\sqrt{7},\ 5}\,\}$

d) $a=2$, $b=3$, $c\in\{\,\mathbf{\sqrt{5},\ \sqrt{13}}\,\}$

17. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $120°$.

a) $a=3$, $b=4$, $c=\mathbf{\sqrt{37}}$

b) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{\sqrt{7}}$

c) $a=3$, $b=5$, $c=\mathbf{7}$

d) $a=2$, $b=3$, $c=\mathbf{\sqrt{19}}$

18. Dla podanych liczb a i b podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b i c, w którym miara kąta między bokami długości a i b jest równa $60°$.

a) $a=2$, $b=3$, $c=\mathbf{\sqrt{7}}$

b) $a=3$, $b=4$, $c=\mathbf{\sqrt{13}}$

c) $a=3$, $b=5$, $c=\mathbf{\sqrt{19}}$

d) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{\sqrt{3}}$

19. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną n większą od k, że

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

a) $k=11,\quad n=\mathbf{34}$

b) $k=100,\quad n=\mathbf{301}$

c) $k=33,\quad n=\mathbf{100}$

d) $k=22,\quad n=\mathbf{67}$

20. Wskazać takie liczby naturalne a i b większe od 1, że podana liczba jest równa $2^{2^{a^b}}$.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $x^{y^z}=x^{(y^z)}$.

a) $\left(2^{2^{3}}\right)^{2},\quad a=\mathbf{3},\quad b=\mathbf{2}$

b) $\left(2^{5^{3}}\right)^{8},\quad a=\mathbf{2},\quad b=\mathbf{7}$

c) $\left(2^{5^{2}}\right)^{4},\quad a=\mathbf{3},\quad b=\mathbf{3}$

d) $\left(2^{2^{5}}\right)^{16},\quad a=\mathbf{6},\quad b=\mathbf{2}$