Geometria elementarna
Lista 1

1 Pola figur

1. Niech Δ będzie trójkątem o bokach długości a,b,c. Niech r to promień okręgu wpisanego, R promień okręgu opisanego, γ kąt między bokami o długości a i b, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Pokaż następujące wzory na pole trójkąta:

   (a) $P(\Delta) = pr$

   (b) $P(\Delta) = \frac{abc}{4R}$

   (c) $P(\Delta) = \frac{absin(\gamma)}{2}$.

2. Uogólnij podpunkt 1a na dowolny wielokąt opisany na okręgu.

3. Wyprowadź wzór na pole:

   (a) wypukłego czworokąta, którego przekątne mają długości d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem α

   (b) formentego n-kąta wpisanego w okrąg o promieniu R.

4. Wypukły czworokąt podzielono na cztery części dwoma odcinkami łączącymi środki przeciwległych boków. Cześci te oznaczono cyklicznie numerami I, II, III, IV. Uzasadnij, że suma pól cześci I i III jest taka sama jak suma pól części II i IV.

5. Niech W bedzie wielokątem, którego wszystkie wierzchołki są punktami kratowymi płaszczyzny. Wzór Picka mówi, że $P(W) = w + \frac{b}{2} - 1$, gdzie w to liczba punktów kratowych wewnątrz W oraz b to liczba punktow kratowych na brzegu W. Pokaż wzór Picka gdy W jest:

   (a) prostokątem lub trójkątem prostokątnym

   (b) dowolnym trójkątem.

   Dla jakich jeszcze wielokątów umiesz udowodnić wzór Picka? Czy wzór Picka zachodzi dla "wielokątów z dziurami"?

2 Równoważność przez rozkład

6. Udowodnij, że każdy trójkąt jest równoważny przez rozkład z prostokątem.

7. Przekształć jedną figurę w drugą rozcinając na jak najmniejszą liczbę części:

   (a) deltoid wypukły/niewypukły w prostokąt ($\leqslant$ 4 części)

   (b) sześciokąt foremny w prostokąt (3 części)

   (c) kwadrat w dwa jednakowe mniejsze kwadraty (4 części)

   (d) trójkąt równoboczny w trzy jednakowe mniejsze trójkąty równoboczne (6 części)

   (e) dowolny trójkąt rozwartokątny w prostokąt, którego jeden bok jest równy jednemu z boków trójkąta przy kącie rozwartym (3 części).

8. Sporządź w miarę dokładne rysunki ilustrujące etapy realizowania (w kilku kolejnych krokach) równoważności przez rozkład między:

   (a) trójkątem równobocznym i kwadratem

   (b) sześciokątem foremnym i trójkątem równobocznym.

9. Uzasadnij, że dwa graniastosłupy proste o równych wysokościach i równych polach podstawy są równoważne przez rozkład.

10. Uzasadnij, że każde dwa prostopadłościany mające tę samą objętość są równoważne przez rozkład.

11. Korzystając z poprzednich dwóch zadań uzasadnij, że dowolne dwa graniastosłupy proste o jednakowych objętościach są równoważne przez rozkład.

12. Wykaż, że dowolny równoległościan jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi o takiej samej wysokości i takiej samej (równoległobocznej) podstawie jak wyjściowy równoległościan.

13. Korzystając z poprzednich zadań uzasadnij, że dowolne dwa równoległościany o jednakowych objętościach sa równoważne przez rozkład.

3 Niezmienniki Dehna

W poniższych zadaniach $\alpha_i \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \{q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n : q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}\}$. Można korzystać z tego, że π oraz $acos(\frac{1}{3})$ są niewspółmierne.

14. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Przedyskutuj co to znaczy, że są liniowo zależne/niezależne nad $\mathbb{Q}$.

15. Pokaż, że $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest przestrzenią $\mathbb{Q}$-liniową.

16. Pokaż, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest izomorficzna z $\mathbb{Q}^2$ (tzn. wskaż liniową bijekcję pomiędzy tymi dwoma przestrzeniami liniowymi).

17. Niech $V = \mathbb{Q}(\pi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Ile może wynosić $dim(V)$ jeżeli wiemy, że:

    (a) $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

    (b) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_4$

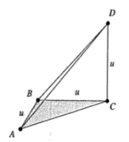
18. Niech $V = \mathbb{Q}(\pi, \alpha_1, \alpha_2)$ gdzie $\alpha_1 = acos(\frac{1}{3})$, $\alpha_2 = \pi + 2acos(\frac{1}{3})$ oraz niech $F\colon \mathbb{Q}^3 \to V$ będzie zadane wzorem $F(q_1, q_2, q_3) = q_1\pi + q_2\alpha_1 + q_3\alpha_2$. Znajdź jądro F.

19. Niech V oraz α_1, α_2 jak w poprzednim zadaniu. Czy istnieje funkcjonał liniowy f na V taki, że $f(\pi) = 0$, $f(\alpha_1) = 1$, $f(\alpha_2) = 3$?

20. Niech $V_1 < V_2$ będzie podprzestrzenią liniową oraz $F\colon V_1 \to \mathbb{Q}$ będzie funkcjonałem. Pokaż, że F rozszerza się do funkcjonału na V_2.

21. Wylicz kąt dwuścienny w czworościanie foremnym.

22. Niech T będzie czworościanem jak na rysunku (wierzchołki tego czworościanu są wierzchołkami sześcianu). Pokaż, że niezmienniki Dehna tego czworościanu są zerowe (wsk. spójrz na stronę 61 'dowodów z księgi').



23. Niech P będzie graniastosłupem prostym, którego podstawą jest wielokąt foremny. Pokaż, że niezmienniki Dehna P są zerowe.

24. Czy niezmiennik Dehna równoległościanu może być niezerowy? A graniastosłupa prostego o dowolnej podstawie?