Geometria różniczkowa
Lista 1

1. Niech $\gamma\colon (a,b) \to \mathbf{R}^2$ będzie niezdegenerowaną krzywą gładką a $s(d)$ długością krzywej $\gamma((0,d))$. Różniczkując $\gamma \circ s^{-1}$ pokaż, że $|\gamma \circ s^{-1}| = 1$.

2. Równanie Freneta: jeżeli γ jest sparametryzowana łukowo, $T(s) = \gamma'(s)$, N jest wektorem takim, że (T, N) jest bazą ortonormalną zorientowaną dodatnio, to $N' = -\kappa_\gamma T$.

3. Niech $f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2$ (zerami tej funkcji są punkty okręgu $C(x_0, y_0, R)$), i niech $\gamma\colon (a,b) \to \mathbf{R}^2$ będzie krzywą gładką, $\gamma'(0) \neq 0$. Udowodnij, że $C(x_0, y_0, R)$ jest ściśle styczny do γ w $\gamma(0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\gamma(0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = 0.$$

   Używając tego warunku wyznacz okrąg ściśle styczny do paraboli $y = x^2$ w punkcie $(1,1)$.

4. Wymyśl jeszcze jakąś definicję okręgu ściśle stycznego. Udowodnij jej równoważność z poprzednimi definicjami.

5. Udowodnij, że jeśli krzywizna γ w $\gamma(0)$ ma niezerową pochodną, to (dla dostatecznie małego ϵ) zbiory $\gamma((-\epsilon, 0))$ i $\gamma((0,\epsilon))$ znajdują się po przeciwnych stronach okręgu ściśle stycznego do γ w $\gamma(0)$.

6. Udowodnij, że jeśli krzywa γ leży wewnątrz (na zewnątrz) okręgu stycznego do niej w $\gamma(0)$, to jej krzywizna w $\gamma(0)$ jest nie mniejsza (nie większa) od krzywizny owego okręgu.

7. Podaj przykład okręgu, który ma dwa punkty wspólne z parabolą $y = x^2$, przy czym w dokładnie jednym z nich jest do niej styczny.

8. Uzasadnij, że krzywa o rosnącej krzywiźnie nie ma samoprzecięć.

9. Wyprowadź wzór na krzywiznę krzywej zadanej parametrycznie ($\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$) wyrażający ją przez pochodne funkcji γ_1, γ_2 (bez założenia, że krzywa jest sparametryzowana łukowo). Wyprowadź wzór na krzywiznę wykresu funkcji $y = f(x)$.

10. Znajdź krzywe w $\mathbf{R}^3$ o stałej krzywiźnie i torsji.

11. Uzasadnij, że jeśli krzywa γ w $\mathbf{R}^3$ jest sparametryzowana łukowo, to

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2}\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle.$$

12. Niech $\kappa > 0$ oraz τ będą dowolnymi funkcjami na odcinku $[a,b]$, $p \in \mathbf{R}^3$ i niech B będzie dodatnio zorientowaną bazą ortonormalną w $\mathbf{R}^3$. Pokaż, że istnieje dokładnie jedna krzywa $\gamma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$ sparametryzowana łukowo taka, że $\kappa_\gamma = \kappa, \tau_\gamma = \tau$, $\gamma(a) = p$ oraz B to trójnóg Freneta γ w punkcie a.