Geometria różniczkowa
Lista 5

1. Sprawdź, że przesunięcie równoległe wzdłuż krzywej nie zależy od parametryzacji tej krzywej.

2. Rozważmy na $E \otimes F$ koneksję indukowaną z koneksji na E i koneksji na F. Sprawdź, że jeśli $s \in \Gamma_\gamma(E)$ i $c \in \Gamma_\gamma(F)$ są cięciami równoległymi, to $s \otimes c \in \Gamma_\gamma(E \otimes F)$ też jest cięciem równoległym.

3. Niech ∇ będzie koneksją na wiązce E ($\dim(E) = d$) nad M, zaś $\gamma\colon [0,1] \to M$ krzywą gładką. Pokaż, że $(\Gamma_\gamma(E), \nabla_t)$ jest izomorficzna z $(C^\infty([0,1])^d, \partial_t)$, tzn. istenieje izomorfizm $C^\infty([0,1])$-modułów $F\colon C^\infty([0,1])^d \to \Gamma_\gamma(E)$ taki, że $F^{-1} \circ \nabla_t \circ F$ jest standardowym różniczkowaniem po t każdej współrzędnej z osobna). Przedyskutuj dlaczego nie powinno Cię to niepokoić, np. nie wynika z tego, że przesunięcie równoległe jest niezależne od krzywej.

4. Załóżmy, że ∇ jest zgodna z metryką Riemanna. Niech $s_1, s_2 \in \Gamma_\gamma(E)$. Pokaż, że $\frac{d}{dt}\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_t s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_t s_2\rangle$.

5. Niech ∇ będzie koneksją na wiązce $\pi\colon E \to M$. Niech $e \in E$ i niech $p = \pi(e)$. Określmy podprzestrzeń H_e przestrzeni T_eE następująco: H_e to zbiór wektorów $v \in T_eE$, takich że istnieją: krzywa $\gamma\colon (a,b) \to M$ i cięcie równoległe $s \in \Gamma_\gamma(E)$, spełniające warunek $s'(0) = v$. Udowodnij, że
   - $T_eE = H_e \oplus T_eE_p$;
   - $H_{te} = DM_t(H_e)$, gdzie $M_t\colon E \to E$ mnoży przez $t \in \mathbf{R}$ na każdym włóknie z osobna;
   - $\{H_e : e \in E\}$ jest gładką dystrybucją na E (z definicji dystrybucja to podwiązka wiązki stycznej, gładkość oznacza, że lokalnie jest rozpinana przez $\dim(H_e)$ gładkich cięć).

6. Niech $\mathcal{H} = \{H_e : e \in E\}$ będzie dystrybucją na E spełniającą warunki z zadania 5. Cięcie $s \in \Gamma_\gamma(E)$ nazywamy równoległym (wzdłuż krzywej γ), jeśli jest ono styczne do dystrybucji $\mathcal{H}$ w każdym swym punkcie. Udowodnij dla tego pojęcia równoległości twierdzenie o jednoznaczności; zdefiniuj odpowiadające mu przesunięcie równoległe wzdłuż krzywej i wykaż, że jest ono liniowe.

7. Niech $\{H_e : e \in E\}$ będzie dystrybucją na E spełniającą warunki zadania 5. Udowodnij, że pochodzi ona (w sposób opisany w tym zadaniu) od pewnej koneksji na E.

8. Udowodnij, że każda wiązka nad $\mathbf{R}^n$ jest izomorficzna z trywialną. Wsk. weź dowolną koneksję i przesuwaj równolegle wzdłuż półprostych. Przedyskutuj kwestię gładkości w zerze.

9. Pokaż, że jeśli ∇ jest zgodna z metryką Riemanna, to F też: $\langle F_{X,Y}s, s'\rangle + \langle s, F_{X,Y}s'\rangle = 0$ dla dowlonych pól X, Y i cięć s, s'.

10. Niech ∇ będzie koneksją na wiązce E. Pokaż, że $F(\nabla) \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy można znaleźć lokalną trywializację E taką, że ∇ jest standardowym różniczkowaniem w tej trywializacji. Wsk.: niech $e_i(\bar{0})$ to dowolna trywializacja $E_{\bar{0}}$. Zdefiniuj $e_i(x_0, 0, \ldots, 0)$ jako przesunięcie równoległe $e_i(\bar{0})$ wzdłóż 0-wej współrzędnej, potem $e_i(x_0, x_1, \ldots, 0)$ jako przesunięcie $e_i(x_0, 0, \ldots, 0)$ wzdłóż 1-wszej współrzędnej itd.

11. Niech Σ będzie 2-wymiarową rozmaitością riemannowską. Pokaż, że krzywizna Gaussa κ_p^Σ jest niezależna od wyboru bazy $T_p(\Sigma)$.

12. Uzasadnij, że dowolne (kawałkami) gładkie pole wektorowe W wzdłuż krzywej znikające na jej końcach pochodzi od pewnej wariacji krzywej.

13. Niech $U\colon M \to \mathbf{R}$ będzie funkcją ("energii potencjalnej") na rozmaitości riemannowskiej M. Dla $p \in M$ i $v \in T_pM$ określmy $L(p,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - U(p)$; dla krzywej $\gamma\colon [0,1] \to M$ zdefiniujmy $L(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t))dt$. Wyprowadź równanie, jakie musi spełniać krzywa γ aby dla dowolnej jej wariacji α zachodził warunek $\frac{dL(\overline{\alpha}(u))}{du}|_{u=0} = 0$. (Jeśli $U \equiv 0$, to wyjdzie równanie geodezyjnej.)