Geometria różniczkowa
Lista 7

1. Niech $f\colon M \to \mathbf{R}$ będzie funkcją gładką taką, że $D_pf = 0$ dla pewnego $p \in M$. Zaproponuj definicję hessianu f w p tak aby dostać symetryczne dwuliniowe odwzorowanie $H_pf\colon T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$. Przedyskutuj poprawność tej definicji i konieczność założenia, że $D_pf = 0$.
2. Pokaż, że w klasie homotopii zamkniętej krzywej w zwartej rozmaitości riemannowskiej istnieje krzywa najkrótsza.
3. Udowodnij tw. Synge'a: orientowalna parzystowymiarowa rozmaitość o dodatniej krzywiźnie sekcyjnej jest jednospójna.
   (a) Załóż nie wprost, że istnieje nieściągalna krzywa zamknięta; weź homotopijną z nią zamkniętą geodezyjną γ o najmniejszej możliwej długości.
   (b) Uzasadnij, że przesunięcie równoległe P_γ dookoła γ jest zachowującym orientację i iloczyn skalarny automorfizmem $T_{\gamma(0)}M$.
   (c) Uzasadnij, że istnieje wektor $w \in T_{\gamma(0)}M$ prostopadły do $\gamma'(0)$, taki że $P_\gamma(w) = w$.
   (d) Rozszerz w do pola wektorowego W wzdłuż γ, które jest równoległe ($\nabla_t W = 0$). Uzasadnij, że W jest wszędzie prostopadłe do γ', oraz że jest gładkie w $\gamma(0) = \gamma(1)$.
   (e) Użyj drugiej formuły wariacyjnej by pokazać, że deformacja γ w kierunku W zmniejsza energię, a więc też długość. Rozważ kwestię założenia o zerowaniu się wariacji na końcach.
4. Znajdź nieparzystowymiarowe kontrprzykłady na tw. Synge'a.
5. Niech γ będzie geodezyjną na okrągłej sferze łączącą dwa punkty antypodyczne. Napisz wzorem wariację γ przez geodezyjne i znajdź stowarzyszone z tą wariacją pole Jacobiego.