Równoważność przez podział

Wprowadzenie

Mówimy, że wielokąty W_1 oraz W_2 są równoważne przez podział, jeżeli W_1 da się podzielić na mniejsze wielokąty, z których można złożyć wielokąt W_2. Mówimy też w skrócie, że z W_1 można złożyć W_2 i stosujemy oznaczenie $W_1 \simeq W_2$.

Niech $P(W)$ oznacza pole wielokąta W. Jest jasne, że jeżeli $W_1 \simeq W_2$ to $P(W_1) = P(W_2)$. Okazuje się, że zachodzi również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie (Wallace-Bolyai-Gerwien)**.** *$P(W_1) = P(W_2) \iff W_1 \simeq W_2$.*

Poniższa seria zadań prowadzi do dowodu tego twierdzenia.

Zadania

Zadanie 1. Złóż jedną figurę z drugiej rozcinając jedną z nich na jak najmniejszą liczbę części:

1. sześciokąt foremny i prostokąt (3 części)
2. kwadrat i dwa jednakowe mniejsze kwadraty (4 części)
3. trójkąt równoboczny i trzy jednakowe mniejsze trójkąty równoboczne (6 części)
4. dowolny trójkąt rozwartokątny i prostokąt, którego jeden bok jest równy jednemu z boków trójkąta przy kącie rozwartym (3 części).

Zadanie 2. Pokaż, że jeżeli $W_1 \simeq W_2$, to W_1 można rozciąć na *trójkąty* (a nie wielokąty), z których można złożyć W_2.

Zadanie 3. Pokaż, że równoległobok o wysokości h i podstawie a jest równoważny przez podział z prostokątem o bokach a oraz h. Rozważ przypadek, gdy równoległobok jest bardzo pochylony.

Zadanie 4. Pokaż, że prostokąt jest równoważny przez podział z kwadratem o tym samym polu.

Zadanie 5. Pokaż, że z dwóch kwadratów można złożyć jeden większy kwadrat (o polu będącym sumą pól wyjściowych kwadratów).

Ambitniej: nie używając twierdzenia Pitagorasa pokaż, że z kwadratów opartych na przyprostokątych trójkąta prostokątnego można złożyć kwadrat oparty na przeciwprostokątnej. Zauważ, że twierdzenie Pitagorasa wynika z tego faktu.

Zadanie 6. Pokaż, że jeżeli $W_1 \simeq W_2$ oraz $W_2 \simeq W_3$, to $W_1 \simeq W_3$

Zadanie 7. Z poprzednich zadań wywnioskuj twierdzenie Wallace-Bolyai-Gerwiena.

Rozkład w wymiarze 3

Zadanie 8. Uzasadnij, że dwa graniastosłupy prostokątne o równych wysokościach i równych polach podstaw są równoważne przez rozkład.

Zadanie 9. Uzasadnij, że każde dwa prostopadłościany mające tę samą objętość są równoważne przez rozkład.

Zadanie 10. Korzystając z poprzednich dwóch zadań uzasadnij, że dowolne dwa graniastosłupy prostokątne o jednakowych objętościach są równoważne przez rozkład.

Zadanie 11. Wykaż, że dowolny równoległościan jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi o takiej samej wysokości i takiej samej (równoległobocznej) podstawie jak wyjściowy równoległościan.

Zadanie 12. Korzystając z poprzednich zadań uzasadnij, że dowolne dwa równoległościany o jednakowych objętościach sa równoważne przez rozkład.